

8-30-58

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DES VERBANDES
DEUTSCHER PHYSIKALISCHER GESELLSCHAFTEN

VON

M. VON LAUE UND R. W. POHL

140. BAND 6. (SCHLUSS-)HEFT

MIT 44 TEXTABBILDUNGEN
(ABGESCHLOSSEN AM 8. JULI 1955)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1955

Begründet 1920. Herausgegeben unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von *K. Scheel* und *H. Geiger*, ab Band 129 herausgegeben unter Mitwirkung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften. Band 1—4 (1921): Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. Ab Band 5: Berlin, Springer.

Die „**Zeitschrift für Physik**“ erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 62.—.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht. Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Manuskriptsendungen sind zu richten an einen der Herren Herausgeber: Professor Dr. M. von Laue, Berlin-Dahlem, Faradayweg 4—6; Professor Dr. R. W. Pohl, Göttingen, Bunsenstr. 9.

Autorenkorrekturen, d.h. nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10 % der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Springer-Verlag OHG.

Berlin W 35, Reichpietschufer 20, Tel. 24 92 51,
Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24, Tel. 24 40,
Göttingen, Weenderstraße 60, Tel. 21 53.

Inhalt.

	Seite
WOLTER, H., Abbildendes Interferometer für Phasen- und Amplitudenmessung. Mit 6 Figuren im Text. (Eingegangen am 29. Oktober 1954) .	565
YAMAGUCHI, S., Zur Abschätzung der Dicke der BEILBY-Schicht. Mit 9 Figuren im Text. (Eingegangen am 10. Dezember 1954)	577
MOLIÈRE, K., und H. NIEHRS, Interferenzbrechung von Elektronenstrahlen. III. Bestimmung der Kristall-Orientierung, der Strukturfaktoren und des Brechungspotentials von Magnesiumoxyd-Kristallen aus den Feinstrukturen der Elektronenbeugungsreflexe. Mit 7 Figuren im Text. (Eingegangen am 28. Januar 1955)	581
GEIGER, W., Die Emission negativer Ladungsträger bei Einwirkung von Halogenmolekülen auf Alkalimetalloberflächen. Mit 11 Figuren im Text. (Eingegangen am 3. Februar 1955)	608
HYLLERAAS, E. A., Zur praktischen Lösung der relativistischen Einelektronengleichung. (Eingegangen am 22. Februar 1955)	626
KERSCHER, R., und H. KULENKAMPFF, Spektrum und Richtungsverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung einer dünnen Antikathode. Mit 6 Figuren im Text. (Eingegangen am 22. Februar 1955)	632
SCHEER, M., und E. ZEITLER, Zum Vergleich der SOMMERFELDSchen Theorie der Röntgen-Bremsstrahlung mit experimentellen Untersuchungen. Mit 5 Figuren im Text. (Eingegangen am 22. Februar 1955)	642
JUST, K., Zur Kosmologie mit veränderlicher Gravitationszahl. (Eingegangen am 14. Februar 1955)	648
Autorenverzeichnis	656

Abbildendes Interferometer für Phasen- und Amplitudenmessung.

Von

HANS WOLTER.

Mit 6 Figuren im Text.

(Eingegangen am 29. Oktober 1954.)

Ein stabiles Interferometer erhält man, wenn man als zweite Planparallelplatte eines JAMINSCHEN Interferometers ein Spiegelbild der ersten verwendet. Es ist automatisch auf niedrige Interferenzordnungen eingerichtet und erlaubt daher Beobachtung bei Glühlicht und dadurch bequeme eindeutige Phasenmessung auch über 360° hinaus. Hohe Meßgenauigkeit ($\lambda/400$ mittlerer Fehler der Einzelmessung bezüglich der Phase und $0,5\frac{0}{00}$ bezüglich der Amplitude) wird erzielt durch Polarisierung der Teilbündel und Messung von Amplitude und Phase durch Elliptizitätsanalyse des resultierenden elliptisch polarisierten Lichtes am Bildort des Objekts. Da Polarisatoren im getrennten Strahlengang wegen der dort zu fordernden, aber nicht leicht realisierbaren Interferenzqualität nicht gut geeignet sind, wird das Ziel besser mit zwei Glimmerplattenpaaren erreicht. Hierdurch werden alle polarisationsoptischen Verfahren auf die Interferometrie und die Interferenzmikroskopie übertragbar. Da als Strahlenvereiniger erst der Analysator wirksam ist, können für die Messung erforderliche Eingriffe, Phasenschiebungen und sogar Justierfehlerkorrekturen noch unmittelbar vor ihm geschehen, und das eigentliche Interferometer kann daher relativ klein und fest ausgeführt werden.

1. Einleitung.

Die angewandte Optik kennt eine Reihe von Aufgabenstellungen¹, die sich zurückführen lassen auf die Grundaufgabe, den Einfluß genau zu messen, den ein makroskopisches oder mikroskopisches Objekt auf die Phase und die Amplitude des Lichtes nimmt. Beispiel hierfür sind die differentialdiagnostische Erkennung von Bakterien, die Prüfung von abbildenden optischen Systemen, die Dicken- und Eigenschaftsmessung an dünnen Schichten, Gelen und Kristallen und die Untersuchung von Konzentrationsänderungen in Flüssigkeiten oder Gasen.

Zur Lösung der Grundaufgabe sind Schlierenverfahren, Phasenkontrastverfahren und Interferenzverfahren bekannt. Die miteinander nahe verwandten Schlieren- und Phasenkontrastverfahren sind durch

¹ Speziell geometrisch-optische Aufgabenstellungen sind genannt z.B. bei F. ZERNIKE [Physica, Haag **1**, 43 (1934)], biologische und medizinische z.B. bei K. MICHEL [Naturwiss. **29**, 61 (1941); **37**, 52 (1950)], H. G. HANSEN, A. ROMINGER und K. MICHEL (Das Phasenkontrastverfahren in der Medizin, Göttingen), chemische und physikalische unter anderem bei H. WOLTER [Fortschr. chem. Forsch. **3**, 1 (1954)].

hohe Empfindlichkeit bei einfacher Realisierung den Interferenzverfahren überlegen, ihnen aber unterlegen durch den Mangel an „Objekt-treue“.

Das in vorliegender Arbeit beschriebene Interferenzverfahren erreicht die Empfindlichkeit und Genauigkeit des modernsten Phasenkontrastverfahrens, indem es wie jenes die polarisationsoptische Elliptizitätsanalyse verwendet. Es hat trotzdem in vollem Umfang die Eigenschaft der Interferenzverfahren, auch bei ausgedehnten Objekten im Rahmen des Auflösungsvermögens frei von bildfälschenden Beugungseffekten zu sein. Es genügt ferner automatisch der bei Interferenzverfahren oft schwer erfüllbaren Justier- und Fertigungsforderung, daß für die Erreichung und erschütterungssichere Beibehaltung aufschlußreicher Bilder niedriger Ordnung Gleichheit zweier Geräteteile gesichert sein muß.

2. Entwicklung des Interferometers aus dem JAMINSchen.

Das Interferometer JAMINS zeichnet sich durch einfache Justierung und Stabilität des Bildes aus. Erschütterungen oder thermische Ausdehnungen, elastische Nachwirkung usw., die den Abstand beider Planparallelplatten etwas ändern, wirken nicht auf das resultierende Bild. Dies erklärt den Erfolg des DYSONSchen Interferenzmikroskops¹, das im wesentlichen aus einer Anwendung des JAMINSchen Interferometers auf das Mikroskop hervorging und stabiler ist als das ältere LINNIKSche Interferenzmikroskop, ein abgewandeltes MICHELSON-Interferometer.

Eines aber hat das JAMIN-DYSONSche Interferenzgerät mit den anderen gemeinsam. Man muß zwei Dinge, in diesem Fall zwei Planparallelplatten, einander extrem genau gleich machen, wenn man in niedrigen Interferenzordnungen beobachten will. Das ist zu fordern, da nur in diesem Falle unter Verwendung von Glühlicht aufschlußreiche farbige Bilder und eine eindeutige Bestimmung der Phase auch über 360° hinaus bequem erreicht werden kann. Freilich ist die Gleichheit zweier Planparallelplatten schon leichter realisierbar als die bei LINNIKS Interferenzmikroskop zu fordernde Gleichheit zweier Mikroskopobjektive.

Bei dem hier zu beschreibenden Interferometer wird an die Realisierungstechnik keine solche Gleichheitsforderung gestellt, da das Gerät ihr automatisch genügt. Das wird vollkommen dadurch erreicht, daß als zweite Planparallelplatte ein Spiegelbild der ersten benutzt wird. Keine zwei Platten könnten sich so genau gleichen wie eine Platte ihrem eigenen Spiegelbild.

Die Fig. 1 zeigt mit ihren ausgezogenen Linien den Strahlengang im JAMINSchen Interferometer. Die gestrichelte Linie bezeichnet einen

¹ DYSON, J.: Nature, Lond. **164**, 1087 (1949).

zusätzlich eingebauten Spiegel und die punktierten Linien die nach Einbau dieses Spiegels auftretenden Strahlen. Die obere Planparallelplatte des JAMINSchen Interferometers wird dann entbehrlich, und das endgültige Gerät kann dann so aussehen, wie die Fig. 2a—d es zeigen. Die Ausführung nach Fig. 2b kommt mit einer kleineren Planparallelplatte auch bei größeren Aperturen aus, und zwar mit einer um so kleineren, je näher der Spiegel ihr liegt und je dünner die Platte selbst ist.

Eine etwas andere Interferometerform nach dem gleichen Prinzip gab Verfasser in einer früheren Arbeit¹. Die jetzt mitgeteilte Form stellt geringere Ansprüche an die halbdurchlässige Verspiegelung der Teilerfläche c , da jeder der beiden Teilstrahlen einmal an dieser Fläche reflektiert und einmal von ihr durchgelassen wird. Damit ist die Amplitudengleichheit beider Strahlen für alle Lichtwellenlängen und bei nahezu jeder Ausführung der Teilerschicht selbst gesichert. Das führt bei geringsten Ansprüchen an die Fertigung zu optimal gesättigten Interferenzfarben und bester Genauigkeit der schließlich resultierenden Meßwerte.

Die Geräte nach den Fig. 2c und 2d unterscheiden sich von denen nach 2a und 2b nur durch eine nochmalige Reflexion der Beleuchtungs-

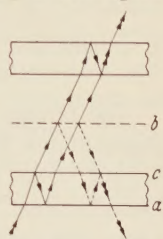


Fig. 1. — Strahlengang im JAMINSchen Interferometer; neuer Strahlengang nach Einbringen des Spiegels b.

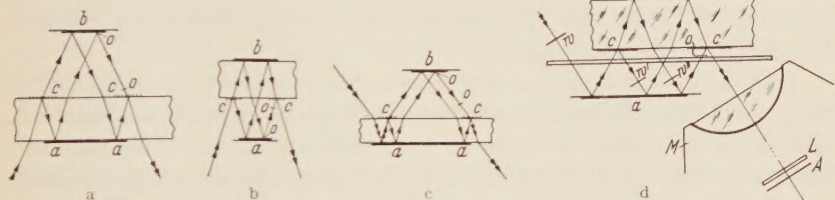


Fig. 2a—d. Beispiele eines Interferometers aus Planparallelplatte und Spiegel. O bezeichnet mögliche Objektorte. In Fig. 2d sind w und A Polarisatoren, L ist eine $\lambda/4$ -Platte aus Glimmer nahe an der Bildebene; w' und w'' sind je ein Polarisator oder je ein Glimmerplattenpaar. Mit M ist ein Mikroskopobjektiv angedeutet. bedeutet halbdurchlässigen Spiegelbelag; — bedeutet massiven Spiegelbelag.

strahlen. Diese ist bei der Anwendung des Interferometers zur Umwandlung eines Durchsichtsmikroskops in ein Interferenzmikroskop und überall dort vorteilhaft, wo man das Licht in Eintrittsrichtung auch wieder aus dem Gerät Herausschicken möchte.

Die Fig. 2d zeigt das Interferometer, mit dem die farbigen Interferenzbilder² der Farbtafel (Fig. 3a, b; 4a; 5a, b) aufgenommen wurden. Die Objekte befanden sich an einer der in Fig. 2a—d mit O bezeichneten

¹ WOLTER, H.: Ann. Physik (6) 9, 65 (1951).

² Die mit diesem Interferometer hergestellten Aufnahmen von biologischen und physikalischen Testobjekten wurden erstmals gezeigt auf der Tagung der NWD Physikalischen Gesellschaft in Braunschweig, April 1951.

Stellen. Über die erläuterten Teile hinaus enthält dieses Interferometer noch Polarisatoren w, w', w'' , den Analysator A und die doppelbrechende Platte L . Ihre Wirkung wird erst im Abschnitt 4 bei der Behandlung der quantitativen Verfahren beschrieben werden.

3. Qualitative Diskussion der interferenzmikroskopischen Testaufnahmen und Vergleich mit Phasenkontrastaufnahmen.

Die farbige Fig. 3a zeigt das Interferenzbild einer auf den Farbfilm abgebildeten Glimmerplatte, die sich im Interferometer 2d am Orte O befand. Die Platte enthält abgesehen von schmalen Kratzern drei Dickenstufen. Jede Stufe wird durch eine Interferenzfarbe nach ihrer Dicke gekennzeichnet. Mühelos gibt das Interferometer für alle Gesichtsfeldorte die gleiche Interferenzfarbe bei gleichen Objekteigenschaften, so daß die Interferenzfarbe ein eindeutiges Kriterium für die Objekteigenschaften ist. Das ist hier leichter als bei anderen Interferometern erreichbar. Es braucht nur ein Geräteteil, der Spiegel a der Fig. 2d, auf Parallelität zur Planparallelplatte einjustiert zu werden. Das geschieht am einfachsten so, daß man das objektfreie Gesichtsfeld auf einheitliche Färbung einstellt; dann sind automatisch auch die niedrigen Ordnungen realisiert.

Die Fig. 3c zeigt ein Phasenkontrastbild desselben Objekts in schwächerer Vergrößerung. An der komplizierten und charakteristischen Begrenzung der schmalen Spitzenstufe links ist der in Fig. 3a gezeigte Ausschnitt wiederzuerkennen.

Daß die beiden räumlich getrennten roten Bereiche des Interferenzbildes 3a gleiche Objektdicke anzeigen, ist evident; dem Phasenkontrastbild 3c dagegen wäre das nicht zu entnehmen, wenn es nur den kleinen Ausschnitt der Fig. 3a zeigen würde. Erst durch Erweiterung des Bildausschnittes über die „Dreieckspitze“ hinaus wird hier erkennbar, daß die beiden Gebiete zu Seiten des Dreiecks der gleichen Stufe angehören. Denn das Phasenkontrastverfahren kontrastiert nur die Ränder der Stufen voneinander, und verschiedene Stufen haben auf dem Großteil ihrer Fläche gleiche Schwärzung trotz verschiedener Dicke. Aber auch in umgekehrter Hinsicht ist die bei dem Interferenzbild 3a gewährte Objektstreue in 3c nicht vorhanden. Innerhalb einer Stufe selbst treten die bekannten Schwärzungsänderungen auf, die dem Phasenkontrastverfahren wie den Schlierenverfahren eigentümlich sind und ihren Grund in einem zwangsläufig unvollkommenen Eingriff in die Spektren haben¹. Besonders eindrucksvoll zeigt sich dieser Mangel an Objektstreue in Fig. 3c in einiger Entfernung von der Spitze der schmalen etwa dreieckigen Stufe.

¹ MENZEL, E.: Optik 5, 385 (1949). — WOLTER, H.: Naturwiss. 37, 272 (1950). — Ann. Physik (6) 7, 33, 147 (1950). — SCHUSTER, K.: Jenaer Jb. 1951, 22.

Ein abbildendes Interferenzverfahren wie das hier beschriebene besteht im Grundsatz darin, daß auf die Bildebene außer dem abbildenden Licht noch kohärentes Zusatzlicht geworfen wird. Es interferiert mit dem abbildenden Licht zu verschiedener Amplitude an Orten mit verschiedener Phase des abbildenden Lichtes und wirkt daher als „Detektor für Phasendifferenzen“. Während das eine der beiden kohärenten Wellenbündel durch das Objekt geht und dort ein Beugungsspektrum aufgeprägt erhält, das für das Objekt charakteristisch ist, durchläuft das zweite Bündel — das kohärente Zusatzlicht — einen objektfreien Raum, besitzt daher stets nur ein Spektrum nullter Ordnung und kann nach der Bündelvereinigung daher auch nur zum Spektrum nullter Ordnung beitragen.

Das abbildende Interferenzverfahren hat also mit dem Phasenkontrastverfahren gemein eine Beeinflussung des Spektrums nullter Ordnung; es ist ihm aber überlegen, weil dazu nicht eine räumliche Trennung des Spektrums nullter Ordnung von den Seitenspektren — die für breite Objekte technisch undurchführbar ist — gefordert werden muß. Dies ist der Grund für die exakte Objekttreue der Interferenzbilder; von diesen gilt daher alles, was in einer früheren Arbeit¹ über „strenge Phasenkontrastbilder“ ausgesagt wurde, zumal die Beeinflussung des Spektrums nullter Ordnung durch Wahl der Amplitude und Phase des Zusatzlichtes willkürlich steuerbar ist. Doch sind die quantitativen Verhältnisse hier in Abschnitt 4 unmittelbar einfacher zu untersuchen, ohne daß explizit die Spektren der Objekte herangezogen werden müßten.

Fig. 3 betraf ein reines Phasenobjekt. Fig. 4 gibt Aufnahmen von Phasen- und Amplitudenobjekten. Auf einer schwach keilförmigen Glasplatte befindet sich eine Zaponlackschicht konstanter Dicke, die durch kreuzweises Herüberführen des flach geschliffenen Stichels einer Teilmaschine kreuzgitterartig fortgenommen ist. Zusätzlich sind einige im unteren Bildteil sichtbare Stückchen teildurchlässiger Folien als Amplitudenobjekte aufgebracht. Keilwinkel und beide Objektarten sind in Fig. 4a deutlich und objekttreuer erkennbar als in der charakteristischen farbigen Phasenkontrastaufnahme Fig. 4b, die nach einem mit linearem Beleuchtungsspalt arbeitenden farbigen Phasenkontrastverfahren² gewonnen wurde.

Die interferenzmikroskopischen Aufnahmen weiterer Testobjekte (Amplituden- und Phasenobjekte) auf einer Platte großen Keilwinkels zeigen die Fig. 5a und b. An ihnen sollen im nächsten Abschnitt die quantitativen Verfahren besprochen werden.

¹ WOLTER, H.: Ann. Physik (6) **7**, 33 (1950).

² WOLTER, H.: Ann. Physik (6) **9**, 57 (1951).



a

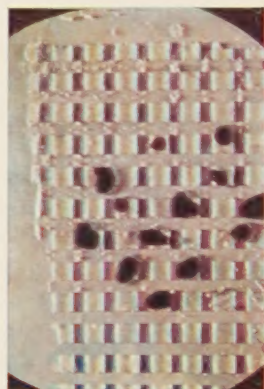


b

Fig. 3a u. b. Glimmerplatte mit drei Dickenstufen im Interferometer nach Fig. 2d. Objekt schräg im Strahlengang; daher leicht plastische Wirkung der Stufenränder. b Dasselbe Objekt wie a, jedoch nach polarisationsoptischer Phasenschiebung.

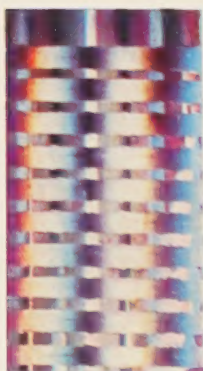


a

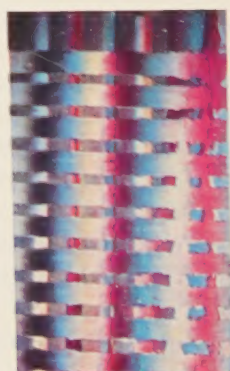


b

Fig. 4a u. b. Phasen- und Amplitudenobjekte auf Glasplatte mit schwachem Keilwinkel. a Interferometeraufnahme; b gleiches Objekt im Farbphasenkontrastgerät.



a



b

Fig. 5a u. b. Phasen- und Amplitudenobjekte auf Glasplatte mit starkem Keilwinkel. a Im gewöhnlichen Interferometer; b dasselbe Objekt nach polarisationsoptischer Phasenschiebung.

4. Quantitative Verfahren.

Eine einfache und der bekannten FIZEAUSCHEN ähnliche Phasenschätzung für reine Phasenobjekte wird durch die Aufnahme 5a nahegelegt. Jede Interferenzfarbe kennzeichnet eine Phase. Der Keilwinkel der Trägerplatte ergibt sich roh aus dem Abstand des dunklen Vertikalstreifens links von dem in der Bildmitte parallel zu ihm liegenden Purpurstreifen. Dabei ist als Lichtwellenlänge die des grünen Lichtes einzusetzen. Genauer wird das durch Verwendung monochromatischen Lichtes und Abstandsmessung benachbarter dunkler Streifen.

Die auf dem dunklen Streifen links liegenden hell erscheinenden Phasenplättchen schieben die Phase offenbar um rund eine halbe Wellenlänge des grünen Lichtes, ebenso die rechts liegenden Einzelplättchen, die blau auf einem Rot zweiter Ordnung erscheinen. Auch die Dicke der Plättchen bzw. der Stufen in den Objekten der Aufnahmen 4a und 3a kann durch diesen Farbver-

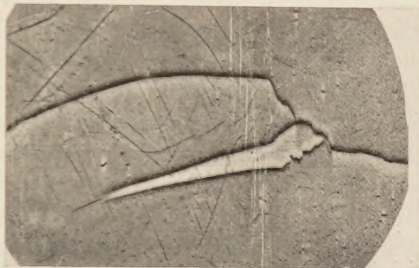


Fig. 3c. Phasenkontrastaufnahme desselben Objekts wie in Fig. 3a und b.

gleich gemessen werden, zwar nur ungenau, aber dafür frei von der Mehrdeutigkeit um ganze Vielfache von 360° , sofern die Phasen der Objekte selbst nicht zu stark in das Weiß höherer Ordnung führen.

Bringt man in das Interferometer nach Fig. 2d parallel zu den Spiegeln eine Keilplatte oder dreht man den Spiegel *a* aus seiner Solljustierung ein wenig, so kann man die Phase des ganzen Gesichtsfeldes etwas schieben und dabei das zu untersuchende Phasenobjekt auf eine besonders scharf erkennbare Interferenzfarbe bringen. Macht man dasselbe anschließend mit der Unterlage ebenfalls, so kann die Phasendifferenz zwischen Objekt und reiner Unterlage mit Meßfehlern in der Größenordnung $\lambda/25$ gemessen werden.

Aber diese Art Phasenschiebung durch Spiegelverkantung bedeutet eine Dejustierung ähnlich wie die bei DYSON ausgenutzte Verschiebung einer mit Keilwinkel behafteten JAMIN-Platte. Eine weitere Steigerung der Meßgenauigkeit erfordert daher andere Maßnahmen zur Phasenschiebung. Dabei muß auch eine zweite Fehlerquelle beachtet werden, die Reflexion an nicht absorbierenden Objekten, die streng genommen die Berücksichtigung eines Amplitudeneinflusses auch für nichtabsorbierende Objekte fordert. Dem kann man Rechnung tragen, indem man die Amplitude des kohärenten Zusatzlichtes variabel macht. Das kann zwar prinzipiell auf mancherlei Arten geschehen, z.B. durch passend eingebaute veränderliche Blenden, durch Graukeile usw. Hier soll eine

gedanklich zwar komplizierter erscheinende, aber praktisch angenehmere Methode näher beschrieben werden, bei der Amplitude und Phase des Zusatzlichtes durch polarisationsoptische Hilfsmittel willkürlich geschoben werden. Von den verschiedenen Möglichkeiten hierzu sei nur ein Beispiel aufgeführt, das die Messung zurückführt auf eine Elliptizitätsmessung des resultierenden Lichtes.

Die beiden monochromatischen Wellenbündel, das abbildende und das kohärente Zusatzlicht, werden durch die Polarisatoren w' und w'' senkrecht zueinander polarisiert. Damit die Spiegel nicht zu einer Elliptizität Anlaß geben, wird die eine Polarisationsrichtung (z. B. die des Bildes) in die Zeichenebene der Fig. 2d, die andere (die des Zusatzlichtes) senkrecht dazu gelegt. Ob man zur Definition der Polarisationsrichtung die elektrische oder magnetische Feldstärke verwendet, ist hier und im folgenden gleichgültig, wenn man nur die einmal gewählte Bezeichnung überall beibehält. Kohärenz beider Wellenbündel setzt voraus, daß bereits polarisiertes Licht in das Gerät eintritt¹. Ist dies noch nicht von vornherein der Fall (Verwendung des Interferometers im Polarisationsmikroskop!), so wird es durch den Polarisator w erreicht, dessen Polarisationsebene etwa unter 45° zur Zeichenebene steht und später unter Bildbeobachtung so einjustiert wird, daß bei objektfreiem Interferometer und einem Analysator A , der genau auf 45° steht, Dunkelheit herrscht.

Die am Analysator A eintreffenden Wellenbündel haben bei objektfreiem Gesichtsfeld und optimaler Justierung streng gleiche Phase und Amplitude. Ihre Schwingungen in der Zeichenebene (x -Koordinate) und senkrecht dazu (y -Koordinate) sind für objektfreie Gesichtsfeldteile beschrieben durch

$$x = \cos \omega t; \quad y = \cos \omega t.$$

Für den Gesichtsfeldteil, auf den ein Objekt abgebildet wird, das die Amplitude von 1 auf den Wert a bringt und die Phase um den Winkel φ verzögert, ist statt dessen

$$x = a \cos (\omega t - \varphi); \quad (1) \quad y = \cos \omega t. \quad (2)$$

Das Licht am Objektort hat also eine Schwingungsellipse, deren Form und Lage eine Messung der Amplitude a und der Phase φ ermöglicht.

Die Messung selbst wird genau so durch Drehen eines Viertelwellenlängenplättchens L und des Analysators A vorgenommen, wie das in einer früheren Arbeit über die Elliptizitätsanalyse bei dem Phasenkontrastverfahren beschrieben ist². L und A werden so lange gedreht,

¹ Senkrecht zueinander polarisierte Bündel, die natürlichem Licht entstammen, haben statistisch verteilte Phasenbeziehung zueinander und sind daher inkohärent.

² WOLTER, H.: Z. Physik **140**, 57 (1954).

bis das Objekt völlig dunkel erscheint. Dann liegt die Viertelwellenlängenplatte L mit ihren Hauptschwingungsrichtungen parallel zu den Ellipsenhauptachsen (x', y' in Fig. 6), und die Analysatorsperriichtung weist in Diagonalenrichtung (punktiert in Fig. 6) des hauptachsenparallel der Ellipse umschriebenen Rechtecks. Wir nennen eine solche Analysatorsperriichtung eine „ausgezeichnete“. Da man die Elliptizität durch zwei solche Stellungen der Viertelwellenlängenplatte (sie gehen durch 90°-Drehung auseinander hervor) aufheben kann, gibt es zwei „ausgezeichnete Analysatorsperririchtungen“, entsprechend den beiden punktierten Diagonalen der Fig. 6.

Gemessen werden beide „ausgezeichnete Analysatorsperririchtungen“ durch die Winkel ψ_1, ψ_2 , die sie mit der Analysatorsperriichtung für Dunkelfeldstellung (d. h. Dunkelheit im objektfreien Gesichtsfeldteil) bilden. Diese beiden Winkel können an einem einzigen exakt auszuführenden Teilkreis gemessen werden und erlauben die Berechnung der Amplitude a und der Phase φ aus den in der früheren Arbeit¹ im Anhang I abgeleiteten Formeln

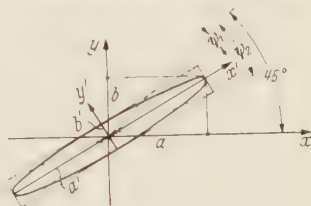


Fig. 6. Schwingungsellipse des Lichtes am Bildort eines Objekts.

$$a^2 = \frac{1 \mp \sin(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 - \psi_2)}{1 \pm \sin(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 - \psi_2)} \quad (3)$$

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \frac{\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi_2)}{\cos(\psi_1 + \psi_2)} \quad (4)$$

Infolge der hierin gesetzten Absolutzeichen ist es belanglos, welcher der beiden Winkel als ψ_1 bezeichnet wird; ebenso macht es keinen Unterschied, wenn statt eines Winkels der um 180° abweichende genommen wird, der ja physikalisch vor ihm nicht ausgezeichnet ist. Man hat selbstverständlich beide Winkel mit gleichem Vorzeichen zu zählen, wenn sie von ihrer Bezugsrichtung nach derselben Seite gemessen wurden, sonst mit verschiedenen Vorzeichen.

Diese zweckmäßige Freiheit in der Bezeichnungsweise der Winkel ψ_1 und ψ_2 macht eine anschließende Vorzeichenbestimmung zu Gl. (3) und eine Quadrantenbestimmung für die Phase erforderlich.

Offenbar ist $a^2 < 1$, wenn die große Ellipsenhalfachse näher an der y -Achse als an der x -Achse liegt, d. h. näher an der Polarisationsrichtung des Zusatzlichtes. Dann gelten in Gl. (3) die oberen Vorzeichen in Zähler und Nenner, anderenfalls die unteren. Die große Halbachse liegt in der Winkelhalbierenden des spitzen Winkels zwischen beiden „ausgezeichneten Analysatorsperririchtungen“.

¹ WOLTER, H.: Z. Physik **140**, 57 (1954).

Bezüglich φ können wir feststellen, daß es stets eine Ordnung n (ganze Zahl) und ein φ' so gibt, daß

$$\varphi = 2\pi n + \varphi' \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi' \leq \pi.$$

Liegt die große Halbachse in demselben Quadrantenpaar, in dem die Analysatorsperriichtung für eingestelltes Dunkelfeld liegt, so ist $|\varphi'| = 90^\circ$, anderenfalls ist $|\varphi'| \geq 90^\circ$.

Das Vorzeichen von φ' ergibt sich aus dem Drehsinn der Ellipse. Rechtselliptisches Licht (vom Beschauer her beurteilt) und damit $\varphi' \geq 0$ liegt genau dann vor, wenn die Polarisationsrichtung (d.h. die Analysatorsperriichtung bei Dunkelstellung) in den Bildort des Objekts im mathematisch positiven Drehsinn auf kürzestem Wege von der schnelleren Achse der Viertelwellenlängenplatte her erreichbar ist.

Die Bestimmung der Ordnung n kann entweder durch die Phasenschätzung so geschehen, wie zu Anfang dieses Abschnitts beschrieben, oder sicherer auch für beliebig hohe Ordnungen in der bekannten polarisationsoptischen Weise. Dabei wird über das Objekt ein Keil doppelbrechenden Materials so weit geschoben, daß nun das Objekt in einer Interferenzfarbe niedriger und deshalb erkennbarer Ordnung erscheint. Zu dem gleichen Zweck kann man auch an die Stelle der Viertelwellenlängenplatte L (Fig. 2d) einen BAUDET-Kompensator oder dergleichen setzen.

5. Technische Realisierbarkeit und Meßgenauigkeit.

Hohe Meßgenauigkeit setzt genaue technische Realisierung des Prinzips voraus. Sie stößt im vorliegenden Falle auf die große Schwierigkeit, völlig einwandfreie Polarisatoren mit Interferenzqualität herzustellen. Brauchbare Ergebnisse wurden gelegentlich mit KÄSEMANNscher Folie erreicht, die in ein Medium nahezu gleichen Brechungsindex eingedeckt wurde. Der Erfolg ist bei dieser Realisierung aber vom Zufall und von der Geduld des Präparators abhängig; die Produkte selbst sind nicht unbegrenzt haltbar. Ebenso wie Verfasser bei dem entsprechenden Problem in der Phasenkontrastmikroskopie das OSTERBERGSche Verfahren aus diesem Grunde verlassen mußte, können auch hier Polarisatoren vorläufig nur in einem phasenunempfindlichen Teil des Strahlenganges benutzt werden, in der Apparatur nach Fig. 2d also nur außerhalb der geteilten Strahlen. Handelsübliche Polarisatoren sind als Eingangspolarisator w und als Analysator A verwendbar, nicht aber an den Stellen w' und w'' .

Das Ziel läßt sich statt durch Polarisatoren aber auch durch optisch drehende Quarzplatten, die um $+45^\circ$ bzw. -45° drehen, annähernd erreichen. Da jedoch solche Platten nicht verfügbar waren, mußte um der einfacheren Realisierbarkeit willen gedanklich komplizierter vorgegangen werden.

Die bei w' und w'' eintreffenden Strahlen haben bereits eine wohldefinierte elliptische Polarisation, und man kann diese leicht zu einer linearen mit vorgebbarer Polarisationsrichtung — in der Zeichenebene bzw. senkrecht dazu (Fig. 2d) — umwandeln, indem man bei w' und w'' statt der Polarisatoren je ein Paar doppelbrechender Platten einjustiert. Von den doppelbrechenden Platten wird gefordert, daß sie planparallel und ungefähr Viertelwellenlängenplatten (Phasendifferenz etwa zwischen 60 und 120°) sind. Wie man leicht zeigen kann — der Beweis ist praktisch dem des Anhangs I der früheren Arbeit¹ analog — läßt sich aus jeder elliptischen Schwingung durch zwei solche Platten, deren schnellere Achsen mit der Sollpolarisationsrichtung die Winkel α_1 und α_2 bilden, linear polarisiertes Licht machen. Die beiden frei wählbaren Winkel α_1 und α_2 geben die beiden Freiheitsgrade zur beliebigen Wandlung des Achsenverhältnisses und der Achsenrichtung, die zusammen eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit bilden. Da die Intensität durch die Plattenpaare verändert wird, muß der Abgleich der beiden Strahlintensitäten — beurteilbar aus der 45° -Stellung der resultierenden Polarisations Ebene am Analysatorort (A in Fig. 2d) im objektfreien Falle — wie sonst durch Drehen des Polarisators w geschehen.

Die Farbbilder 3b und 5b wurden mit Glühlicht und einer Vorrichtung dieser Art als Phasenschieber hergestellt. Die Plattenpaare w' und w'' waren aus einfachen ungeschliffenen, lediglich durch Spalten hergestellten Glimmerplatten zusammengesetzt, die aus einer größeren Zahl im Interferenzmikroskop nach Fig. 2d selbst (ohne Polarisation) auf konstante Dicke über eine hinreichend große Fläche ausgesucht worden waren. Die Aufnahmen zeigen, wie bei unveränderter Interferometerjustierung gegenüber den Aufnahmen 3a und 5a die Phase rein mit polarisationsoptischen Mitteln, und zwar hier durch Drehen der Viertelwellenlängenplatte L und des Analysators A geschoben werden kann.

Diese behelfsmäßige Vorrichtung war hinreichend präzise, um Phasenverschiebungen bei monochromatischem Licht auf $\lambda/400$ und Amplituden auf $0,5\%$ (mittlerer Fehler der Einzelmessung) zu messen.

Eine andere Realisierungsmöglichkeit könnte anschließen an das 1868 von JAMIN² angegebene Interferometer mit zwei dicken Kalkspatplatten. Es war gedacht als eine Alternative zu dem bekannteren JAMINSchen Interferometer; dabei sollte die Strahlenteilung nicht durch Teilreflexion sondern durch Doppelbrechung bewirkt werden. Automatisch führt das zu senkrecht zueinander polarisierten Strahlen, die wie in unserem Falle

¹ WOLTER, H.: Z. Physik **140**, 57 (1954).

² JAMIN, M. J.: C. R. Acad. Sci. Paris **67**, 814 (1868).

behandelt werden könnten. Der Gedanke ist durch SMITH wieder aufgegriffen worden, wie aus einer britischen Patentanmeldung¹ hervorgeht.

6. Vorteile des polarisationsoptischen Vorgehens in der Interferometrie, insbesondere der Interferenzmikroskopie.

Nach Einfügen der Polarisatoren oder gleichwertiger Mittel bei w' und w'' vereinigt der sog. Vereinigerspiegel c rechts die beiden Strahlen nur noch rein geometrisch. Interferometrisch werden beide durch ihre Polarisation senkrecht bzw. parallel zur Zeichenebene der Fig. 2d getrennt voneinander weitergeführt. Erst der Analysator A ist als Vereiniger wirksam. Auf dem Wege vom Spiegel c bis zum Analysator A lassen sich beide Strahlen noch mit polarisationsoptischen Mitteln getrennt voneinander beeinflussen. Deshalb kann der sonst stöempfindliche Interferometerenteil des getrennten Strahlenganges fest und klein ausgeführt werden. Äußere Einflüsse vermögen auf dem Wege vom Spiegel c bis zum Analysator A die Interferenzen nicht mehr zu verändern, da beide Strahlen — geometrisch vereinigt — in gleicher Weise betroffen werden. Auch Justierfehler lassen sich daher durch Maßnahmen außerhalb des getrennten Strahlenganges korrigieren. Die hohe Meßgenauigkeit der polarisationsoptischen Elliptizitätsanalyse wird auf die Interferometrie anwendbar.

Dem Direktor des Instituts für Experimentalphysik, Herrn Professor Dr. W. LOCHTE-HOLTGREVEN, dankt Verfasser für die lebenswürdige Unterstützung. Ebenso gilt der Dank des Verfassers Herrn E. KÄSEMANN, Oberaudorf am Inn, für die Überlassung ungedeckter Polarisationsfolien besonders guter Qualität und der Agfa sowie Herrn Dr. MÜLLER, Leverkusen, für die Unterstützung mit Agtacolor-Filmen, insbesondere für die ausgezeichnete Entwicklung der Farbaufnahmen.

Anmerkung bei der 2. Korrektur: Wie Herr M. FRANÇON dem Verfasser lebenswürdigerweise schrieb, hat auch KETTELER ein Interferometer ähnlich dem in Fig. 2a skizzierten benutzt, freilich ohne polarisationsoptische Phasenschiebung oder Elliptizitätsanalyse.

Kiel, Institut für Experimentalphysik der Universität.

¹ SMITH, F. H.: Brit. Pat. Specification 639, 014; Class 97 (i), J (8b:9:15); application 1947.

Zur Abschätzung der Dicke der Beilby-Schicht.

Von

SHIGETO YAMAGUCHI.

Mit 9 Figuren im Text.

(Eingegangen am 10. Dezember 1954.)

Mit Hilfe des Oxydhaut-Abdruckverfahrens der Elektronenmikroskopie kann man prüfen, ob die sich auf dem Metall bildende BEILBY-Schicht dicker oder dünner als 150 \AA ist (A.).

Die Analyse der Beugungsbilder, die von der scharfen Kante eines keilförmigen Metallstückes erzeugt wurden, führte zur ungefähren Abschätzung der Dicke (etwa 250 \AA) der umgewandelten BEILBY-Schicht (B.).

A. Anwendung des Oxydhaut-Abdruckverfahrens.

Erster Versuch. Die Oberfläche einer gewalzten Platte aus Chromstahl (Cr: 13%) wurde mit Schmirgelpapier poliert und dann durch Eintauchen in ein aus Natrium- und Kaliumnitrat bestehendes Schmelzbad (etwa 300°C) oxydiert [1]. Die sich dabei auf der Metalloberfläche bildende Oxydhaut ließ sich in einer

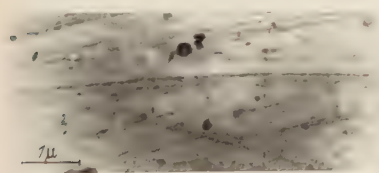


Fig. 1. Elektronenmikroskopische Aufnahme der sich auf der *mechanisch polierten* Metalloberfläche bildenden Oxydhaut. Man erkennt die beim Polieren in die Metalloberfläche eingeritzten Streifspuren.

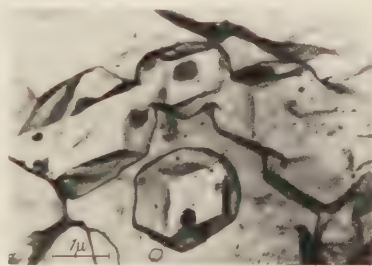


Fig. 2. Elektronenmikroskopische Aufnahme der sich auf der *geätzten*, der Fig. 1 zugrunde liegenden Metalloberfläche bildenden Oxydhaut. In dieser Figur erkennt man die Orientierung des Substrates: Die (110)-Dodekaeder-Ebenen liegen nahezu parallel der makroskopischen Oberfläche des Versuchsstückes.

alkoholischen Bromlösung abtrennen, weil sich in ihr nur das Metallsubstrat auflöste [1]. Fig. 1 zeigt das Elektronenmikroskopbild dieser abgetrennten Oxydhaut. Man erkennt deutlich die beim Polieren in die Metalloberfläche eingeritzten Streifspuren.

Im weiteren wurde die der Fig. 1 zugrunde liegende Oberfläche zunächst mit einer alkoholischen, gesättigten Bromlösung ziemlich tief geätzt und dann oxydiert. Das Elektronenmikroskopbild (Fig. 2) der

wie zuvor abgetrennten Oxydhaut läßt diesmal die Orientierung des gewalzten Versuchsstückes erkennen: Die (110)-Dodekaeder-Ebenen liegen nahezu parallel zur makroskopischen Oberfläche des Versuchsstückes.

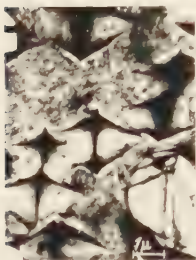


Fig. 3. Elektronenmikroskopische Aufnahme der sich auf der mit einer Juweliersäge erzeugten Permalloy-Schnittfläche bildenden Oxydhaut. In dieser Figur erkennt man die regelmäßig orientierten Oktaeder-Ebenen.

Zweiter Versuch. Ein Einkristall aus Permalloy (Ni: 81,5%) wurde durchgesägt, und zwar mit einer Juweliersäge, damit die sich an der Schnittfläche bildende BEILBY-Schicht möglichst dünn blieb [2]. Die Schnittfläche wurde dann wie im ersten Versuch oxydiert und behandelt. Fig. 3 zeigt die elektronenmikroskopische Vergrößerung der abgetrennten Oxydhaut. Man erkennt die regelmäßig orientierten Oktaeder-Ebenen.

Wir können sogleich beweisen, daß Fig. 3 die Orientierung des Permalloysubstrates richtig wiedergibt: Die *polierte* Permalloyoberfläche wurde mit einer alkoholischen, gesättigten Bromlösung ziemlich tief geätzt. Den Oxydhautabdruck dieser geätzten Permalloyoberfläche zeigt Fig. 4. Die charakteristischen Oktaeder-Ebenen sind in Fig. 3 und 4 gleich orientiert. Fig. 3 stellt eine *Oxydationsfigur* des Metallsubstrates dar, die sich infolge der

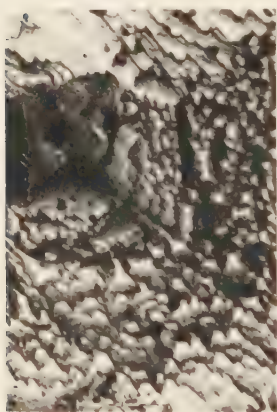


Fig. 4. Elektronenmikroskopische Aufnahme der sich auf der geätzten, der Fig. 3 zugrunde liegenden Metalloberfläche bildenden Oxydhaut. Die Orientierung der Oktaeder-Ebenen in Fig. 3 und 4 stimmt überein.

Abhängigkeit der Oxydationsgeschwindigkeit von der Orientierung des Substrates ergibt. Fig. 4 ist ein gewöhnlicher Abdruck der chemisch geätzten Metalloberfläche, d.h. eine *Ätzfigur*.

Die maßgebende Dicke des für die übliche Elektronenmikroskopie geeigneten Oxydhautabdruckes beträgt rund 150 Å [3]. Wir gelangen daher zu dem Schluß, daß die der Fig. 4 entsprechende BEILBY-Schicht dicker als 150 Å ist; die der Fig. 3 entsprechende BEILBY-Schicht ist dagegen dünner als 150 Å. Die Profile der den Fig. 1 und 3 zugrunde liegenden Versuchsstücke sind in Fig. 5 und 6 skizziert. In Fig. 5 ist die BEILBY-Schicht so dick, daß das eigentliche Metallsubstrat nicht oxydiert wird. In Fig. 6 ist dagegen die BEILBY-Schicht so dünn, daß noch das Metallsubstrat mit oxydiert wird. Mit Hilfe

des Oxydabdruckverfahrens der Elektronenmikroskopie läßt sich also prüfen, ob die sich auf dem Metall bildende BEILBY-Schicht dicker oder dünner als 150 Å ist.

B. Abschätzung der Dicke der BEILBY-Schicht

auf Grund der an der Metalloberfläche ablaufenden Phasenumwandlung.

Die mechanisch polierte Oberfläche eines unmagnetischen, rostfreien Stahles (Cr: 18%, Ni: 8%) besteht aus kubisch-raumzentrierten ferritischen Kristalliten. Das läßt sich mit Hilfe der Elektronenreflexion erkennen (vgl. Fig. 7, [4]). Durch das mechanische Polieren sind also die ursprünglichen, austenitischen Kristallite in der Oberflächenschicht in den ferritischen Zustand umgewandelt worden.

Eine gewalzte Platte dieses rostfreien Stahles wurde mechanisch so poliert, daß sie ein keilförmiges Profil erhielt (Fig. 9). Die scharfe Kante des Versuchsstückes wurde mit Elektronen durchstrahlt (170 kV). Dabei ergab sich das Beugungsbild der Fig. 8. Es besteht sowohl aus den den ferritischen Kristalliten eigentümlichen

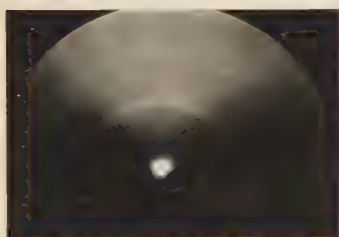


Fig. 7. Elektronenreflexionsbild der mechanisch polierten Oberfläche des unmagnetischen, rostfreien Stahles. Dieses Bild, dem kubisch-raumzentrierte, ferritische Kristallite zugrunde liegen, beweist, daß beim Polieren die unmagnetischen, austenitischen Kristallite in den Ferrit-Zustand umgewandelt wurden. Spannung etwa 68 kV, Kameralänge 495 mm.

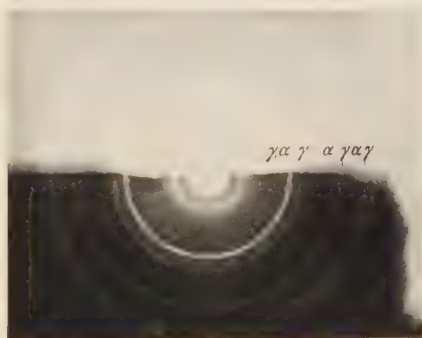


Fig. 8. Elektronendurchstrahlungsbild des keilförmigen Versuchsstückes aus unmagnetischem, rostfreiem Stahl. Dieses Bild besteht sowohl aus den den ferritischen Kristalliten eigentümlichen Beugungsringen als auch jenen, die den austenitischen zuzuordnen sind. Spannung etwa 170 kV, Kameralänge 495 mm. 2,3fach nachvergrößert. γ Austenitische Kristallite; α ferritische Kristallite.

Ringen als auch aus jenen, die den austenitischen Kristalliten zuzuordnen sind. Die Ferrit-Kristallite sind beim mechanischen Polieren infolge der dabei ablaufenden Phasenumwandlung aus den Austenit-Kristalliten entstanden.

Die Metallkante hatte eine Dicke von etwa 2000 Å. Diesen Wert kann man nach der ELLISSchen Theorie über Elektronenabsorption (theory of plural electron scattering) bestimmen [5].

Die Beugungsstärke $S(A)$ der austenitischen Kristallite verhält sich zur Beugungsstärke $S(F)$ der ferritischen Kristallite wie die austenitische Schichtdicke $D(A)$ zur ferritischen Schichtdicke $D(F)$, (Fig. 9). Da die minimale Dicke D_0 (2000 Å) des keilförmigen Versuchsstückes bereits bekannt ist, können wir die Dicke $D(F)$ der ferritischen BEILBY-Schicht annähernd berechnen:

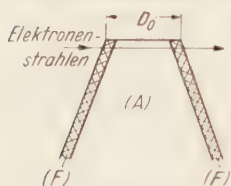


Fig. 9. Profil des keilförmigen Versuchsstückes der Fig. 8. D_0 : 2000 Å. (A): Austenitische Schicht. (F): Die ferritische, umgewandelte BEILBY-Schicht. $D(F)$ = 250 Å.

$$\frac{S(A)}{S(F)} = \frac{D(A)}{D(F)}$$

$$D(A) + 2D(F) = D_0.$$

Eliminiert $D(A)$, so folgt:

$$D(F) = \frac{1}{1 + \frac{S(A)}{S(F)}} \cdot \frac{D_0}{2}$$

Wenn man hier die beobachteten Werte $S(A)/S(F) = 3/1$ und $D_0 = 2000$ Å annimmt, so folgt $D(F) = 250$ Å. Dieser Wert der Dicke der umgewandelten BEILBY-Schicht ist also in Übereinstimmung mit dem ersten Versuch größer als 150 Å. Die in der vorliegenden Arbeit bestimmte Dicke der BEILBY-Schicht weicht nicht beträchtlich von den von anderen Forschern mitgeteilten Angaben ab [6].

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Dr. S. SHIMADZU, Dr. T. HORI, Dr. G. ISHIDA und Dr. K. OZAWA (Shimadzu Seisakusho Ltd., Kyoto) für den zur Verfügung gestellten Apparat.

Literatur.

- [1] MAHLA, E. M., and N. A. NIELSEN: J. Appl. Phys. **19**, 378 (1948). — YAMAGUCHI, SH.: J. Appl. Phys. **23**, 445, 935 (1952). — [2] WALKER, J. G., H. J. WILLIAMS and R. M. BOZORTH: Rev. Sci. Instrum. **20**, 947 (1949). — [3] HEIDENREICH, R. D., and E. A. NESBITT: J. Appl. Phys. **23**, 352 (1952). — [4] BURWELL, J. T., and J. WULFF: Trans. Amer. Inst. Min. Metallurg. Engrs. **135**, 486 (1939). — [5] ELLIS, S. G.: Phys. Rev. **87**, 970 (1952). — ELLIS, S. G.: J. Appl. Phys. **23**, 1024 (1952). — YAMAGUCHI, SH.: J. Appl. Phys. **25**, 811 (1954). — [6] PINSKER, Z. G. Electron Diffraction, pp. 369–376. London: Butterworths Scientific Publications 1953. — KRANERT, W., K. H. LEISE u. H. RAETHER: Z. Physik **122**, 248 (1944). — KRANERT, W., u. H. RAETHER: Ann. Phys., Lpz. **43**, 520 (1943). — Diese beiden Berichte wurden in der vorliegenden Arbeit nicht unmittelbar von ihren Originalmitteilungen, sondern von dem oben erwähnten Lehrbuch von PINSKER zitiert. In diesem Reich befinden sich nicht noch diese beiden, 1943 und 1944 veröffentlichten Zeitschriften.

Tokyo (Japan), Scientific Research Institute, Ltd., Hongo.

Interferenzbrechung von Elektronenstrahlen. III.

Bestimmung der Kristall-Orientierung, der Struktur faktoren und des Brechungspotentials von Magnesiumoxyd-Kristallen aus den Feinstrukturen der Elektronenbeugungsreflexe.

Von

K. MOLIÈRE und H. NIEHRS*.

Mit 7 Figuren im Text.

(Eingegangen am 28. Januar 1955.)

Es wird eine Methode hergeleitet und beschrieben, nach der man aus der Geometrie eines durch Interferenzbrechung aufgespaltenen Elektronenbeugungsreflexes von einem submikroskopischen, würfelförmigen Kristall dessen Orientierung, sowie den Strukturfaktor der Interferenz und das innere Potential der Elektronenbrechung ermitteln kann. Die Brauchbarkeit des Verfahrens wird an einigen Beugungsfeinstrukturen des MgO im einzelnen demonstriert. Die bei dieser Substanz ermittelten Strukturpotentiale (FOURIER-Koeffizienten des Potentials) zeigen gute Übereinstimmung mit den aus der Theorie bzw. aus Röntgenintensitäten berechneten Werten. Das innere Potential Φ_0 der Elektronenbrechung ist anscheinend innerhalb der Versuchsbedingungen eine von den Indizes der Interferenz, der Elektronengeschwindigkeit und der Strahlintensität unabhängige Größe. Der erhaltene Wert für Φ_0 (15,3 V) liegt um einige Volt höher, als der theoretisch berechnete Wert des mittleren Gitterpotentials.

A. Einleitung.

Die Anwendung der dynamischen Theorie der Elektronenbeugung führt zu der Möglichkeit, Strukturpotentiale (FOURIER-Koeffizienten des Kristallpotentials) aus der Geometrie der an Idealkristallen erhaltenen Interferenzbilder zu berechnen, ohne daß man auf Intensitätsmessungen angewiesen ist. Bei planparallelen Einkristallplatten ist das seit längerem bekannt und bewiesen. In diesem Falle überlagern sich die Amplituden der verschiedenen, im Kristall erregten Wellenfelder an der Austrittsfläche, und die Strukturpotentiale lassen sich aus den Abständen der im konvergenten Bündel entstehenden Interferenzstreifen entnehmen [1, 2]. Bei der Beugung an Kristallpolyedern, bei welchen die Elektronen zum Teil Paare von gegeneinander geneigten Flächen durchlaufen, beobachtet man dagegen eine Aufspaltung in einzelne Strahlen, die als Fortsetzungen der verschiedenen Teilwellen der inneren Wellenfelder anzusehen sind (Interferenzbrechung [3, 4]). Aus den

* Über das im II. Teil dieser Arbeit beschriebene, experimentelle Material hinaus verwertet diese Arbeit eine größere Anzahl von Beugungsaufnahmen, die inzwischen von Herrn H. WAGENFELD hergestellt worden sind. Dieser hat sich auch in dankenswerter Weise bei der Ausmessung und numerischen Auswertung beteiligt.

gegenseitigen Winkeln der bei Anregung einer Interferenz entstehenden Strahlen kann man bei bekannter Kristallstruktur und -form neben dem Potential Φ_0 der gewöhnlichen Elektronenbrechung das zur Interferenz gehörige Strukturpotential Φ_s berechnen. Der Vergleich mit theoretisch berechneten Werten ermöglicht eine sehr direkte Prüfung der dynamischen Theorie.

In den vorausgegangenen Teilen dieser Veröffentlichung [4], [5]¹ haben wir die Theorie der Interferenzbrechung für parallelepipedische Kristalle formuliert (I) und über Beugungsexperimente an kleinen Magnesiumoxyd-Würfeln berichtet (II). ALTENHUIS hat in seiner Dissertation ⁶ eine Anzahl von Beugungsreflexen dieser Substanz hinsichtlich der Strukturpotentiale ausgewertet. Der Vorteil der erstmalig von ihm angewandten Technik (äußerst geringe Apertur des einfallenden Strahlenbündels) war die beachtliche Schärfe der erhaltenen Feinstrukturaufnahmen. Es handelt sich dabei um komplizierte Schwärzungsverteilungen von sehr geringer Ausdehnung, die oft durch die Zufallsstruktur des Plattenkorns gestört sind. Zur Auswertung standen seinerzeit nur ziemlich primitive Hilfsmittel zur Verfügung, und der Umfang des experimentellen Materials genügte noch nicht ganz. Über einen Teil der Ergebnisse, welche die Durchführbarkeit der Aufgabe bewiesen haben, wurde in einer Kurzmitteilung berichtet ⁷. Wir haben jetzt die Anzahl der Aufnahmen wesentlich erhöht, um zuverlässige Mittelwerte zu bekommen. Dieses Verfahren ist übrigens nicht nur wegen der Ausschaltung von Meßfehlern angebracht. Man gleicht durch solche Statistik in diesem Falle auch systematische Fehler aus, welche bei der einzelnen Messung dadurch entstehen können, daß der vorausgesetzte Idealfall der Einfachinterferenz in Wirklichkeit selten erfüllt ist. Von den ursprünglichen Bildern haben wir nur die schärfsten wieder verwendet, und das ganze, inzwischen weiter gesammelte und geschiftete Aufnahmematerial mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden, besseren Hilfsmitteln neu ausgewertet. Davon handelt diese Arbeit².

Als Grundlage für die Auswertung einer Feinstrukturfigur hat man zunächst die Orientierung des beugenden Kriställchens relativ zum einfallenden Strahl zu ermitteln. Die Methode dazu wird in Abschn. B

¹ Im folgenden beziehen wir uns auf diese beiden Arbeiten [4], [5] mit den Bezeichnungen „I“ bzw. „II“. Dort finden sich weitere Literaturangaben.

² An dieser Stelle ist eine Arbeit von HONJO und MIHAMA [8] zu erwähnen, die uns vor kurzem bekanntgeworden ist. Ursprünglich offenbar ohne Kenntnis unserer parallelen Untersuchungen, haben diese Autoren im wesentlichen die gleichen Ziele verfolgt, wie wir. Auf einige Punkte ihrer Arbeit kommen wir weiter unten zurück. Unsere Einwände beziehen sich vor allem auf die Methode, mit welcher sie bei ihren Auswertungen die Kristallorientierung bzw. den Anregungsfehler berücksichtigen.

hergeleitet und beschrieben. Von den Verfahren zur Bestimmung der Strukturpotentiale spricht Abschn. C. Die Ergebnisse werden in Abschn. D dargestellt und diskutiert.

B. Bestimmung der Lage des Kristalls aus der Geometrie der Feinstrukturfiguren.

1. Die Meßgrößen des Feinstrukturdreiecks und ihre Auswertung.

Wir schließen uns an die Ausführungen in I. Abschn. C an (S. 458 ff.), die wir, im Hinblick auf unsere Anwendung, für orthogonale Kristallformen spezialisieren.

Die photographische Platte liegt bei unseren Versuchen, wie üblich, senkrecht zur Einstrahlungsrichtung $\tilde{\mathcal{E}}_0$. Die Fig. 1 zeigt im Schnitt die EWALDSche Konstruktion für den Fall einer ungenauen Erfüllung der BRAGG'schen Bedingung, welche zum Indextripel g ($=g_1, g_2, g_3$) gehört. Die Vektoren normieren wir, wie früher, so, daß die Ausbreitungskugel um den Punkt A den Radius $|\tilde{\mathcal{E}}_0|=1$ hat; der Vektor \mathcal{B}_g führt also vom Nullpunkt zu dem Punkt G des in Einheiten der Wellenzahl $1/\lambda$ gemessenen, reziproken Gitters. Der Glanzwinkel ϑ_g (zwischen $\tilde{\mathcal{E}}_0$ und der Netzebenenchar $\perp \mathcal{B}_g$, oder auch zwischen \mathcal{B}_g und der Plattenebene) weicht um einen kleinen Betrag von dem Werte $\bar{\vartheta}_g$ ab, der die BRAGG'sche Gleichung $\sin \bar{\vartheta}_g = \frac{1}{2} |\mathcal{B}_g|$ befriedigt. Proportional zu dieser Winkelabweichung und identisch mit dem Abstände des Gitterpunktes G von der Kugel ist (praktisch) der Anregungsfehler ϱ , den wir durch Gl. (I, 6) definiert haben. Interferenzstrahlen \mathcal{E}^{ik} von merklicher Intensität können zum betreffenden Indextripel g nur entstehen, wenn $|\varrho|$ sehr kleine Werte hat ($\sim 10^{-3}$); ihre Richtungen können denjenigen des „Bezugsvektors“ $\tilde{\mathcal{E}}_g = \tilde{\mathcal{E}}_0 - \mathcal{B}_g$ nur eng benachbart sein.

Ist L der Abstand der Platte vom beugenden Kristall, so ist das Interferenzbild eine L -fache Vergrößerung der Figur, welche die Strahlvektoren \mathcal{E}^{ik} (bzw. ihre Verlängerungen) auf der Ebene $P-P'$ (vgl. Fig. 1) abzeichnen, die im Punkte O die Kugel tangiert. Angesichts der kleinen Glanzwinkel $\vartheta_g \approx 10^{-2}$, die bei der Elektronenbeugung nur in Betracht kommen, können wir anstatt dessen die Projektion der Strahlvektoren auf die Tangentialebene $P'-P'$ der Kugel senkrecht zu $\tilde{\mathcal{E}}_g$ betrachten. Durch diese nicht ganz exakte Projektion werden die linearen Dimensionen und Winkel der Figur nur um relative Beträge

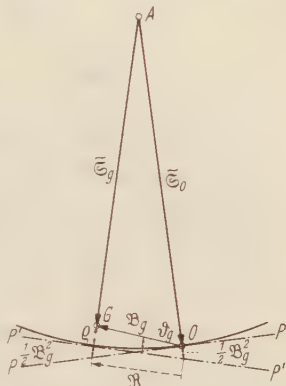


Fig. 1. Ewaldsche Konstruktion bei ungenauer Erfüllung einer Interferenzbedingung. $\tilde{\mathcal{E}}_0$ Einstrahlungsrichtung; \mathcal{B}_g Vektor des reziproken Gitters (in Einheiten der Wellenzahl gemessen); ϱ Anregungsfehler.

der Größenordnung $\mathfrak{B}_g^2 \approx 10^{-3}$ verfälscht. Da die Interferenzstrahlen \mathfrak{Z}^{ik} gegen \mathfrak{Z}_g um kleine Winkel $\approx \Phi_0/E \approx |q| \approx 10^{-3}$ geneigt sind, können wir ohne wesentliche Vernachlässigung die Feinstrukturfigur auf der Platte als die L -fache Vergrößerung derjenigen Konfiguration ansehen, welche die Endpunkte der Einheitsvektoren \mathfrak{Z}^{ik} auf der Kugel bzw. der praktisch damit übereinstimmenden Ebene $P' = P''$ erzeugen. Auf diese Ebene, die wir im folgenden kurz als die „ P' -Ebene“¹ bezeichnen wollen, beziehen wir uns der Einfachheit halber bei den jetzt vorzunehmenden geometrischen Überlegungen.

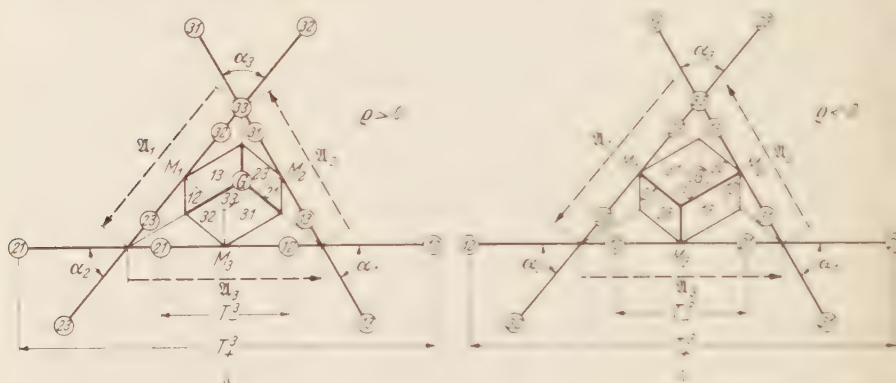


Fig. 2 a u. b. Zusammenhang zwischen Kristall-Orientierung und Form des Feinstrukturdreiecks, bei (a) positivem, (b) negativem Anregungsfehler.

Aus den Ausführungen in I. C., insbesondere der dortigen Gl. (I. 29), S. 460 geht hervor, daß die Endpunkte der Strahlvektoren \mathfrak{Z}^{ik} , und damit also auch die Beugungsmaxima auf der Platte, auf drei geraden Linien verteilt sind. Diese gehen nur im Spezialfall $\rho = 0$ durch einen gemeinsamen Punkt; im allgemeinen bilden sie ein Dreieck von endlicher Fläche. Experimentelle Belege findet man z. B. in Fig. II. 2. Die Geraden verlaufen parallel zu den Vektoren η_i ¹:

$$\eta_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1}. \quad (1)$$

Dabei sind $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die hier orthogonal angenommenen Flächennormalen bzw. Kantenrichtungen des Kristalls: $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = +1$. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sind die (positiv vorausgesetzten) Komponenten von \mathfrak{Z}_g nach diesen Richtungen:

$$\beta_i = (\mathfrak{Z}_g, \beta_i). \quad (2)$$

¹ Wenn wir hier und im folgenden Beziehungen mit bestimmten Indizes angeben, so sind diese immer einschließlich der durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 daraus hervorgehenden Gleichungen zu verstehen.

Man beachte, daß die η_i in der P' -Ebene liegen, denn aus (1) und (2) folgt

$$(\tilde{\mathfrak{S}}_g \eta_i) = 0. \quad (3)$$

Da die \mathfrak{z}_i aufeinander senkrecht stehen, gilt ferner $(\mathfrak{z}_i \eta_i) = 0$: Die Vektoren η_i verlaufen senkrecht zu den Kristallkanten, und damit natürlich auch zu deren Projektionen in der P' -Ebene. Nun erhält man aber nach I, S. 400 die Eckpunkte des Feinstrukturdreiecks, indem man vom Gitterpunkt G aus in Richtung der Kristallflächennormalen \mathfrak{z}_i zu der genannten Ebene geht. Ihre Richtungen sind die der „Stachelstrahlen“ Gl. (I, 25):

$$\mathfrak{S}^{ii} = \tilde{\mathfrak{S}}_g + \varrho \frac{\mathfrak{z}_i}{\beta_i}. \quad (4)$$

Die Projektionen der von G zu den Eckpunkten führenden Vektoren $\varrho \frac{\mathfrak{z}_i}{\beta_i}$ stehen folglich senkrecht auf den η_i und damit den Dreiecksgeraden. Die Projektion des reziproken Gitterpunktes G auf die Ebene \perp zu $\tilde{\mathfrak{S}}_g$ entspricht also dem Höhenschnittpunkt des Feinstrukturdreiecks.

Die so beschriebenen, geometrischen Zusammenhänge sind in Fig. 2 veranschaulicht. Bildebene ist die P' -Ebene mit Blickrichtung vom Ausbreitungspunkt her. Der reziproke Gitterpunkt G ist im Abstände $|\varrho|$ von der Bildebene zu denken, und zwar bei der Fig. 2a ($\varrho > 0$) oberhalb, bei Fig. 2b ($\varrho < 0$) unterhalb derselben. Die Lage des Zentralflecks (Durchstoßpunkt der Einfallrichtung der Elektronen) relativ zu den Figuren wird zunächst noch nicht in Betracht gezogen. Die zugehörigen Projektionsbilder des Kristalls sind in die beiden Dreiecksfiguren eingezeichnet, natürlich ohne Rücksicht auf die Proportionen der wirklichen Längen der Kristallkanten.

Für die Seiten des Dreiecks ergibt sich, mit Gl. (4), (1),

$$a_1 = \mathfrak{S}^{22} - \mathfrak{S}^{33} = \varrho \cdot \eta_1. \quad (5)$$

Diese Vektoren umlaufen das Dreieck entgegen dem Uhrzeiger in der Reihenfolge a_3, a_2, a_1 . Die Eckwinkel α_i berechnen wir nun aus

$$\text{ctg } \alpha_1 = - \frac{(a_2 a_3)}{(\tilde{\mathfrak{S}}_g [a_2 a_3])}.$$

Der Zähler ist nach (5), (1): $-\frac{\varrho^2}{\beta_2^2 \beta_3^2}$; der Nenner wird, mit Berücksichtigung von (2) und $\sum_j \beta_j^2 = \tilde{\mathfrak{S}}_g^2 = 1 - 2\varrho \simeq 1$,

$$\varrho^2 \left(\tilde{\mathfrak{S}}_g \left[\frac{\mathfrak{z}_2}{\beta_2} - \frac{\mathfrak{z}_1}{\beta_1}, \frac{\mathfrak{z}_1}{\beta_1} - \frac{\mathfrak{z}_3}{\beta_3} \right] \right) = \frac{\varrho^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \sum_j \beta_j^2 \simeq \frac{\varrho^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3}.$$

Es folgt

$$\text{ctg } \alpha_1 = \frac{\beta_2 \beta_3}{\beta_1}. \quad (6a)$$

Multipliziert man die beiden entsprechenden Gleichungen für α_2 und α_3 , so folgt für die Komponente β_1 des Bezugsvektors $\hat{\Xi}_s$ nach den Kristallachsen:

$$\beta_1 = (\text{ctg } \alpha_2 \cdot \text{ctg } \alpha_3)^{\frac{1}{2}}. \quad (6b)$$

Damit erhält man aus Gl. (5) mit (1) für die Längen der Dreiecksseiten in der Tangentialebene der Kugel

$$a_1 = |\varrho| \gamma_1 = |\varrho| \frac{(\beta_2^2 + \beta_3^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta_2 \beta_3} = |\varrho| \frac{\sin \alpha_1}{\left(\prod_j \cos \alpha_j \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

So ergibt sich für den Betrag des Anregungsfehlers:

$$|\varrho| = \frac{A_i}{L \cdot \gamma_i} = \frac{1}{L} \left(\prod_j \cos \alpha_j \right)^{\frac{1}{2}} \frac{A_i}{\sin \alpha_i}. \quad (7)$$

A_i sind die auf der Platte ausmeßbaren Seitenlängen ($A_i = L \cdot a_i$). Natürlich benutzt man bei der praktischen Bestimmung von $|\varrho|$ den Mittelwert der drei Quotienten $A_i / \sin \alpha_i$.

Die Komponenten β_i des Bezugsvektors $\hat{\Xi}_s$ sind also nach Gl. (6b) durch die Eckwinkel des Dreiecks bestimmt. Die Genauigkeit, mit welcher so die Kristallstellung zu ermitteln ist, reicht natürlich nicht zur Berechnung des Anregungsfehlers ϱ aus, abgesehen davon, daß die Winkelmessungen zu unsicher sind, setzt ja die Gültigkeit von Gl. (6b) die Vernachlässigung von ϱ neben der Eins voraus. Durch Messung der Seitenlängen A_i ist aber unabhängig nach Gl. (7) der Absolutwert des Anregungsfehlers gegeben¹. Die Kenntnis von $|\varrho|$ ist, wie später gezeigt wird, für die Bestimmung der Strukturpotentiale bereits im allgemeinen ausreichend.

2. Die Lage des Feinstrukturdreiecks auf dem DEBYE-SCHERRER-Ring.

Wir fragen nun nach der Richtung der Dreiecksgeraden relativ zum DEBYE-SCHERRER Ring bzw. zum Orte des Zentralflecks der Aufnahme. Dieser entspricht der Projektion des beugenden Kriställchens in der Richtung des einfallenden Elektronenstrahles $\hat{\Xi}_0$ ².

¹ HONJO und MIHAMA [8] machen bei ihren Auswertungen nicht von der Möglichkeit Gebrauch, den Anregungsfehler unabhängig zu bestimmen. Sie benutzen anstatt dessen geschätzte Werte für $|\varrho|$, welche sie gewinnen, indem sie a priori theoretische Werte der Potentialgrößen Φ_0 und Φ_g , also die gesuchten Ergebnisse, in die Rechnung hineinstecken. Wir halten dieses Verfahren für nicht ganz befriedigend und unnötig kompliziert. Bei größeren Anregungsfehlern macht sich nämlich ein Fehler in der Bestimmung dieser Größe erheblich im Ergebnis für Φ_g bemerkbar.

² Der Nullstrahl müßte auch in eine (sternförmige) Feinstrukturfigur aufgespalten sein; diese konnte bisher nicht beobachtet werden. Der Zentralfleck wäre zugleich Mittelpunkt dieses Sternes.

Zur Vorbereitung betrachten wir wieder Fig. 1. Wir schreiben Ausdrücke für die Winkel des dortigen Vektordreiecks $\tilde{\xi}_0, \mathfrak{B}_g, \tilde{\xi}_g$ an, welche im folgenden benötigt werden:

$$\sin \vartheta_g = -\cos(\tilde{\xi}_0, \mathfrak{B}_g) = \frac{1}{2} |\mathfrak{B}_g| \left(1 + \frac{2\varrho}{\mathfrak{B}_g^2}\right), \quad (8a)$$

$$\sin \vartheta'_g = \cos(\tilde{\xi}_g, \mathfrak{B}_g) = \frac{1}{2} |\mathfrak{B}_g| \left(1 - \frac{2\varrho}{\mathfrak{B}_g^2}\right), \quad (8b)$$

$$\cos(\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_g) = 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{B}_g^2. \quad (8c)$$

ϑ'_g ist der Winkel zwischen $\tilde{\xi}_g$ und der beugenden Netzebenenschar.

Man leitet diese Beziehungen leicht an Fig. 1 ab, wenn man relative Fehler der Ordnung ϱ vernachlässigt. $|\varrho| \cdot |\mathfrak{B}_g|$ kann die Größenordnung 10^{-2} , $|\varrho| \cdot \mathfrak{B}_g^2$ die Ordnung Eins erreichen. Aus Gl. (8c) geht hervor, daß der Nullpunkt 0 des reziproken Gitters von der P' -Ebene in der Projektionsrichtung $\tilde{\xi}_0$ näherungsweise die Entfernung $\frac{1}{2} \mathfrak{B}_g^2$ hat, wie es in Fig. 1 angegeben ist.

Die Komponenten des Vektors \mathfrak{B}_g nach den Achsen g_i drücken wir durch die Indizes der Interferenz g_1, g_2, g_3 aus. Mit der Abkürzung

$$G = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

schreiben wir

$$(g_i, \mathfrak{B}_g) = |\mathfrak{B}_g| \cdot G^{-1} \cdot g_i. \quad (10)$$

Dem Radius vom Zentralfleck zu dem i -ten Eckpunkt des Dreiecks entspricht in der P' -Ebene der Vektor

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{B}_g + \varrho \frac{g_i}{\beta_i} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}_g^2 \cdot \tilde{\xi}_0. \quad (11)$$

Das entnimmt man aus Gl. (4) mit Hilfe von Fig. 1¹. Für den Betrag dieses Vektors erhält man unter Beachtung der Gl. (8a), (10)

$$R_i = |\mathfrak{B}_g| \left(1 + \frac{3}{8} \mathfrak{B}_g^2 + \frac{\varrho}{|\mathfrak{B}_g|} G^{-1} \frac{g_i}{\beta_i} + \dots\right). \quad (11a)$$

Zur Charakterisierung der Richtung der Dreiecksseite a_i benutzen wir nun den Winkel ϵ_i , welchen diese Gerade gegen den vom Zentralfleck

¹ Der dem Radius zum Höhenschnittpunkt entsprechende Vektor ergibt sich ähnlich zu

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{B}_g + \varrho \tilde{\xi}_g - \frac{1}{2} \mathfrak{B}_g^2 \cdot \tilde{\xi}_0.$$

Die zum DEBYE-SCHERRER-Ring radialen und tangentialen Komponenten des von der Projektion des reziproken Gitterpunktes G zu den Eckpunkten führenden Vektors

$$\mathfrak{R}_i - \mathfrak{R} = \varrho \left[\frac{g_i}{\beta_i} - \tilde{\xi}_g \right]$$

sind in II, S. 110 angegeben (bei der Berechnung ist ϱ und \mathfrak{B}_g^2 neben Eins vernachlässigt). Damit wurden dort die Skizzen Fig. II, 5 und 6 berechnet.

zu ihrem Mittelpunkt M_i (Fig. 2) führenden Radiusvektor $\frac{1}{2}(\mathfrak{R}_j + \mathfrak{R}_i)$ bildet. Die ε_i berechnen wir aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_3])}{(\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_3)} = \frac{-2(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3])}{\mathfrak{R}_2^2 - \mathfrak{R}_3^2}. \quad (12)$$

Der Nenner ist nach Gl. (11a)

$$\frac{2\varrho|\mathfrak{B}_g|}{\beta_2\beta_3 \cdot G} (g_2 \cdot \beta_3 - g_3 \cdot \beta_2).$$

Bei der Berechnung des Zählers können wir es uns erlauben, in Gl. (11) den letzten Term wegzulassen ($\mathfrak{B}_g^2 = 1$), unter Beachtung der Definition (2) und der Orthogonalität der \mathfrak{z}_i ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\beta_2\beta_3}{\varrho}(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3]) &= -\frac{1}{\varrho}(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\beta_2\mathfrak{B}_g + \varrho\mathfrak{z}_2, \beta_3\mathfrak{B}_g + \varrho\mathfrak{z}_3]) \\ &= \beta_3(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{B}_g, \mathfrak{z}_2]) - \beta_2(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{B}_g, \mathfrak{z}_3]) - \varrho(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3]) \\ &= (\mathfrak{z}_3\tilde{\mathfrak{E}}_g)(\mathfrak{z}_2[\tilde{\mathfrak{E}}_g\mathfrak{B}_g]) - (\mathfrak{z}_2\tilde{\mathfrak{E}}_g)(\mathfrak{z}_3[\tilde{\mathfrak{E}}_g\mathfrak{B}_g]) - \varrho \cdot \beta_1. \end{aligned}$$

Vektoralgebraische Umformung der beiden ersten Terme führt auf

$$(\tilde{\mathfrak{E}}_g[\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3][\tilde{\mathfrak{E}}_g\mathfrak{B}_g]) - \varrho\beta_1 = \tilde{\mathfrak{E}}_g^2(\mathfrak{z}_1\mathfrak{B}_g) - \{(\tilde{\mathfrak{E}}_g\mathfrak{B}_g) + \varrho\}\beta_1.$$

Mit $\tilde{\mathfrak{E}}_g^2 \approx 1$ und den Gln. (8b), (10) erhält man schließlich

$$|\mathfrak{B}_g| \cdot G^{-1} (g_1 - \frac{1}{2}|\mathfrak{B}_g| \cdot G \cdot \beta_1).$$

Für ε_1 ergibt sich somit

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{g_1 - \frac{1}{2}|\mathfrak{B}_g| \cdot G \cdot \beta_1}{g_2\beta_3 - g_3\beta_2}. \quad (13)$$

In diesen Gleichungen ist $|\mathfrak{B}_g|$ bzw. $G = (\sum \varepsilon_i^2)^{1/2}$ aus der Tatsache bekannt, daß der betreffende Reflex auf einem bestimmten DEBYE-SCHERRER-Ring vorgefunden wird. Die β_i lassen sich mit (6b) aus den gemessenen Dreieckswinkeln α entnehmen. Zusätzliche Meßwerte der Winkel ε_i ermöglichen es, durch Benützung der Gln. (13) die mit der getroffenen Wahl der Kristallachsen im Einklang stehende Indizierung g_1, g_2, g_3 des Reflexes zu ermitteln, und darüber hinaus die Auswertung unabhängig zu kontrollieren.

Will man bei bekanntem Indextypel den Zusammenhang zwischen der Kristallstellung und den Richtungen der Dreiecksgeraden deutlicher übersehen, so hat man die in Gl. (13) auftretenden β_i als Funktionen eines die Kristallorientierung charakterisierenden Parameters darzustellen. Wir wollen hierzu so vorgehen, daß wir den durch die Zahlen g_1, g_2, g_3 relativ zu den Kristallachsen \mathfrak{z}_i definierten, reziproken Gittervektor \mathfrak{B}_g im Raume festgehalten denken, z. B. in der Lage der Fig. 4. Wir wählen zur Beschreibung der Kristallstellung den Winkel φ_1 zwischen der durch \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{B}_g definierten Ebene und der $\tilde{\mathfrak{E}}_0 = \mathfrak{B}_g^\perp$ -Ebene (= „Bezugsebene“, Zeichenebene der Fig. 4). Zunahme von φ_1 bedeute eine positive Drehung des Kristalls um die Richtung $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{B}_g \wedge \mathfrak{B}_g^\perp$.

Senkrecht zu \mathbf{b}_0 definieren wir einen weiteren Einheitsvektor \mathbf{n}_0 , welcher ebenfalls in die Bezugsebene fallen möge, und zwar so, daß $(\hat{\mathbf{z}}_0, \mathbf{n}_0) = +\cos \vartheta'_g$ ist. Die Richtungskosinus der Kristallachse \mathbf{z}_1 nach \mathbf{b}_0 und \mathbf{n}_0 sind:

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_0) = \frac{g_1}{G}, \quad (\mathbf{z}_1, \mathbf{n}_0) = \frac{(g_2^2 + g_3^2)^{\frac{1}{2}}}{G} \cdot \cos \psi_1.$$

Für $\hat{\mathbf{z}}_g$ gilt nach Gl. (8b): $(\hat{\mathbf{z}}_g, \mathbf{b}_0) = \sin \vartheta'_g$, $(\hat{\mathbf{z}}_g, \mathbf{n}_0) = \cos \vartheta'_g$. Es folgt also für die \mathbf{z}_1 -Komponente von $\hat{\mathbf{z}}_g$:

$$\beta_1 = \frac{(g_2^2 + g_3^2)^{\frac{1}{2}}}{G} \cdot \cos \psi_1 + \frac{g_1}{G} \sin \vartheta'_g. \quad (14)$$

Hierbei war es erlaubt, $\cos \vartheta'_g$ durch Eins zu ersetzen. Die in den durch zyklische Vertauschung aus (14) entstehenden Ausdrücken für β_2 bzw. β_3 auftretenden Winkel ψ_2 bzw. ψ_3 hängen mit ψ_1 zusammen durch die Beziehungen

$$\psi_2 = \psi_1 - \arctg \frac{g_3 G}{g_1 g_2}, \quad \psi_3 = \psi_1 + \arctg \frac{g_2 G}{g_1 g_3}. \quad (14a)$$

Es ist zweckmäßig, den Variationsbereich von ψ_1 und die Vieldeutigkeit der \arctg -Funktionen so zu berücksichtigen, daß die β_i auf positive Werte beschränkt sind.

Setzt man (14) in Gl. (13) ein, so ergibt sich für die Richtungswinkel der Dreiecksgeraden

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{g_1}{(g_2^2 + g_3^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sin \psi_1} - \frac{1}{2} |\mathfrak{B}_g| \operatorname{ctg} \psi_1. \quad (15)$$

Die Glieder mit den Faktoren $\sin \vartheta'_g = \frac{1}{2} |\mathfrak{B}_g| - \frac{g}{|\mathfrak{B}_g|}$ bzw. $\frac{1}{2} |\mathfrak{B}_g|$ spielen in den Gln. (14) bzw. (15) im allgemeinen nur die Rolle von kleinen Korrekturen. Bemerkenswert ist an Gl. (15), daß die nach Gl. (12) definierten Winkel ε_i sich als unabhängig vom Anregungsfehler erweisen¹.

3. Die Indizierung der Interferenzen und das Vorzeichen des Anregungsfehlers.

Es ist nun auf die folgende Tatsache hinzuweisen, die man aus den Gln. (14), (15) ablesen kann: Die Feinstrukturfiguren, welche zu zwei Kristallstellungen gehören, die durch Inversion der Interferenzindizes und durch Vorzeichenumkehr des Anregungsfehlers, bei gleichem Betrage $|g|$, auseinander hervorgehen, sind miteinander annähernd kongruent. Zum Beweise gehen wir wieder von der Lage des Vektors \mathfrak{B}_g in Fig. 1 aus, so daß also bei positivem g dieser Vektor in die feste Raumrichtung \mathbf{b}_0 zeigt. Wir drehen jetzt den Kristall um die Richtung \mathbf{n}_0 , welche senkrecht zu \mathbf{b}_0 in der Zeichenebene liegt, und zwar um genau 180° . Da die \mathbf{z}_i mit dem Kristall verbunden sind, ist in der neuen Lage $\mathfrak{B}_{\bar{g}}$ parallel zu \mathbf{b}_0 ,

¹ Gl. (15) kann benutzt werden, um aus den gemessenen Winkeln ε_i die Kristallstellung zu bestimmen. Auf ähnliche Weise sind HONJO und MIHAMA [8] vorgegangen. Wir halten allerdings die von uns benutzte Methode, welche von den Winkeln α_i ausgeht, für einfacher und rationeller, zumal sie auch $|g|$ liefert.

und ψ_1 hat das Vorzeichen gewechselt. Die Feinstrukturfigur ist natürlich auch umgedreht. Schließt man aber nun eine zweite Drehung an, diesmal um eine Achse senkrecht auf der Zeichenebene von Fig. 4 und um den sehr kleinen Winkel $2|\varrho|/|\mathfrak{B}_g|^{-1}$, so daß der Anregungsfehler von $+|\varrho|$ über Null zu $-|\varrho|$ übergeht, so erhält man nahezu die ursprüngliche Form und Lage des Dreiecks wieder. Die Gln. (14) und (15) zeigen nämlich, daß bei der Operation $g_i \rightarrow -g_i$, $\psi_i \rightarrow -\psi_i$, $\varrho \rightarrow -\varrho$ sowohl die Werte der $\tan \epsilon_i$ als auch die der β_i , abgesehen von Beträgen der Größenordnung $|\mathfrak{B}_g| \sim 10^{-2}$, un geändert bleiben. Die Seiten und

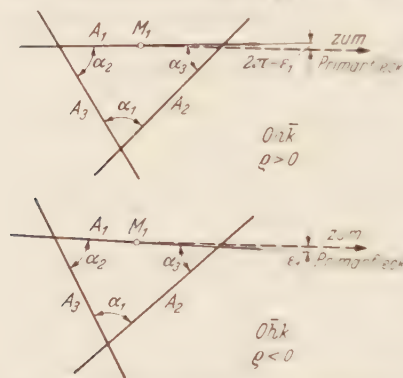


Fig. 3. Lage der nahezu radial verlaufenden Seiten des Feinstrukturdreiecks gegen den primären hkl des $Oz k$ relativ zum Radius des Debye-Scherrer-Ringes.

Winkel des Dreiecks hängen ja mit den β_i und $|\varrho|$ durch die Gln. (6b), (7) zusammen. — Die Fig. 2a und b können als Beispiel eines Paares von zwei Interferenzen mit inversen Indextripeln und entgegengesetzt gleichem ϱ betrachtet werden. In diesem Fall müßten die beiden Figuren genau genommen kleine Abweichungen von der Kongruenz zeigen, was die Zeichnungen nicht berücksichtigen.

Um aus einer vorliegenden Feinstrukturfigur die Kristallstellung eindeutig zu ermitteln, mußte man selbst bei der für die Messung günstigen

$$\mp \frac{1}{2} G |\mathfrak{B}_g| \frac{\beta_1}{k\beta_2 + h\beta_3},$$

also verschiedene Vorzeichen annehmen muß. Wenn, wie hier, die Winkel ϵ_i nahe bei 0 oder auch π liegen, so ist das die für die Meßgenauigkeit günstigste Situation.

Im allgemeinen ist aber zu sagen, daß man durch Ausmessung einer einzelnen Feinstrukturfigur zwei mögliche Stellungen des Kristalls ermitteln kann, welche durch eine Drehung um etwa 180° auseinander hervorgehen. Die zu diesen beiden Stellungen gehörigen (zueinander inversen) Indextripel und die entsprechenden Vorzeichen von ϱ sind

in jedem Falle leicht aus der Lage der Figur abzulesen. Welcher Fall wirklich vorgelegen hat, ist meistens nicht zu entscheiden.

Gelingt es aber, in einer definierten Versuchsreihe mehrere Feinstrukturaufnahmen vom selben Kristall zu machen, z. B. indem man mit demselben Präparat bei unveränderter Einstrahlungsrichtung die Beschleunigungsspannung E variiert, so ist eine unabhängige Bestimmung des Vorzeichens von ϱ und damit eine Entscheidung zwischen den beiden, zur Auswahl stehenden Indextripeln möglich. Es läßt sich nämlich bei einer solchen Reihe von Aufnahmen an der Verteilung der Reflexe auf den DEBYE-SCHERRER-Ringen leicht erkennen, welche Reflexe auf verschiedenen Bildern vom selben Kristall herrühren. Aus Fig. 4, welche wieder den Schnitt der $\tilde{\mathfrak{E}}_0$, \mathfrak{B}_g -Ebene mit der Einheitskugel darstellt, ist zu ersehen, wie sich das (mit $1/\lambda$ reduzierte) reziproke Gitter bei der Erhöhung der Spannung proportional zu λ kontrahiert. Bei wachsendem E , abnehmendem λ , wird also der Abstand $|\varrho|$ des Gitterpunktes von der Kugel, und damit die Fläche des Dreiecks, größer werden, falls $\varrho > 0$ ist; und umgekehrt. Zur genauen Analyse des Falles ist $|\varrho|$ natürlich aus den Messungen der Seiten und Winkel mit Gl. (7) zu berechnen. Ein Beispiel für die Anwendung dieses Kriteriums wird unten gezeigt.

Es ergibt sich später, daß die Ermittlung des Vorzeichens von ϱ zwar im allgemeinen für die Bestimmung der Strukturpotentiale unwesentlich ist. Wir haben diese Frage aber hier ausführlich behandelt, da uns das Problem einer exakten Orientierungsbestimmung submikroskopischer Kristalle an sich von Interesse zu sein scheint.

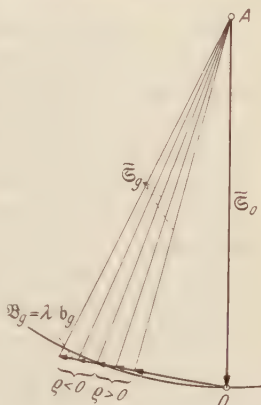


Fig. 4. Änderung des Anregungsfehlers bei einer Reihe von Aufnahmen mit variiert Elektronengeschwindigkeit und konstanter Kristall-Orientierung.

C. Bestimmung der Strukturpotentiale aus den Lagen der Beugungsflecken.

1. Die Orte der Intensitätsmaxima auf den Geraden des Feinstrukturdreiecks.

Die Tatsache, daß die einzelnen Strahlen eines durch Interferenzbrechung aufgespaltenen Beugungsreflexes auf den in den vorangehenden Abschnitten charakterisierten Dreiecksgeraden abgebildet werden müssen, ergab sich aus den Gln. (I, 29) mit den Definitionen (I, 12a, b, sowie 27, 28). Die dort auftretenden Funktionen γ_i und δ_i (I, 12), welche einzeln den Einfluß der gewöhnlichen Brechung und der dynamischen Strahlaufspaltung darstellen, enthalten neben geometrischen Faktoren die relativen Strukturpotentiale $\Phi_0 E$ und $\Phi_g E$. Wir schreiben

die Funktionen hier in der Form

$$\gamma_i = \frac{1}{E} \Phi_0 (1 + \mu_i), \quad (16)$$

$$\delta_i = \frac{1}{E} [(\varrho E - \Phi_0 \mu_i)^2 + \Phi_0^2 (1 + 2\mu_i)]^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Dabei sind die Summen \sum_i (I, 12) weggelassen; ferner ist die Abkürzung eingeführt [vgl. (10)]:

$$\mu_i = \frac{1}{2} \frac{(\mathfrak{B}_g \delta i)}{(\mathfrak{Z}_0 \delta i)} \simeq \frac{1}{2} |\mathfrak{B}_g| \frac{g_i}{G \cdot \beta_i} \quad (\simeq 10^{-2}). \quad (18)$$

Wir bezeichnen, wie früher, einen Strahl, welcher die Kristallfläche σ_i ($i = 1$ zu 3) als Eintrittsfläche und σ_{i+1} zu σ_3 als Austrittsfläche durchlaufen hat, durch das hochgestellte Indexpaar i^1 . In den Kreisen der Fig. 2, welche die Beugungsflecken darstellen sollen, ist diese Bezifferung auch eingetragen. Wir geben nun die Koordinaten s^{i^1} der Flecken auf der i -ten Dreiecksgeraden a_i nach Gl. (I, 29) an, wobei wir als Anfangspunkt den Mittelpunkt M_i dieser Seite nehmen (vgl. Fig. 2). Der Richtungssinn der den Dreiecksgeraden zugeordneten Koordinatenachsen entspreche demjenigen der Vektoren a_i , Gl. (5), welche das Dreieck entgegen dem Uhrzeiger umlaufen. Wir beziehen uns wieder auf die Tangentialebene der Einheitskugel \mathfrak{E}_1 (P -Ebene), die Koordinaten sind also Winkelgrößen. Da der Vektor $\mathfrak{Z}_i = \frac{1}{2} \rho \cdot r_3$ in den Gln. (I, 29) zum Mittelpunkt M_3 führt, und dieser in der P -Ebene liegt, ergibt sich also für die Koordinaten der Doppelbrechungsflecken auf a_i :

$$\left. \begin{aligned} s_+^{12} &= \pm \frac{1}{2} (\gamma_1 + \delta_1) y_3, \\ s_-^{12} &= \pm \frac{1}{2} (\gamma_1 - \delta_1) y_3, \\ s_+^{21} &= \mp \frac{1}{2} (\gamma_2 - \delta_2) y_3, \\ s_-^{21} &= \mp \frac{1}{2} (\gamma_2 + \delta_2) y_3. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die Doppelvorzeichen beziehen sich auf die Alternative $\varrho > 0$ (oberes Zeichen), $\varrho < 0$ (unteres Zeichen). Die Richtigkeit der angegebenen Vorzeichen sieht man bei Betrachtung der Gl. (5): $a_i = \varrho \cdot \eta_i$, leicht ein; bei negativem ϱ sind die in (I, 29) stehenden Vektoren η_i den a_i entgegengesetzt. In Fig. 2a, b sind die Kristallgebiete, welche die Beugungsflecken erzeugen, entsprechend beziffert. Wie man sieht, wird das an einem keilförmigen Teile des Kristalls entstehende Strahlenpaar im Mittel immer in der aus der geometrischen Optik bekannten Weise von der Kante des durchstrahlten Kristallprismas hinweggelenkt; das ist die Wirkung des positiven, mittleren Potentials.

Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks (Stachelpunkte) sind:

$$\left. \begin{aligned} s^{11} &= + \frac{1}{2} |\varrho| y_3, \\ s^{22} &= - \frac{1}{2} |\varrho| y_3. \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

Wie in II erwähnt, haben diese Punkte nur selten merkliche Intensität (höchstens einer von ihnen); sie entsprechen den an planparallelen Kristallgebieten gebeugten Strahlen.

Entsprechende Formeln folgen für die anderen Dreiecksgeraden durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3.

Fig. 5 zeigt, wie sich die Beugungsflecken auf einer Dreiecksgeraden bei Änderung des Anregungsfehlers verschieben. Die Angaben beziehen sich z. B. auf die horizontal verlaufende Gerade a_3 in Fig. 2a, b. Bei der Berechnung sind in den γ_i und δ_i , Gl. (16), (17), die kleinen Größen μ_i unterdrückt. Für Φ_0 ist 15, für Φ_g 5 V eingesetzt; das entspricht etwa der 220-Interferenz beim MgO.

Die mit dem Suffix + gekennzeichneten Flecken, d. h. die mit positivem Vorzeichen der Wurzel δ_i , liegen natürlich immer außerhalb des Dreiecks auf den Verlängerungen der Seiten; die Aufspaltung wird mit zunehmendem Betrage des Anregungsfehlers größer. Der Abstand der inneren Doppelbrechungsflecken, mit dem Suffix —, wird dagegen zunächst kleiner, wenn man q

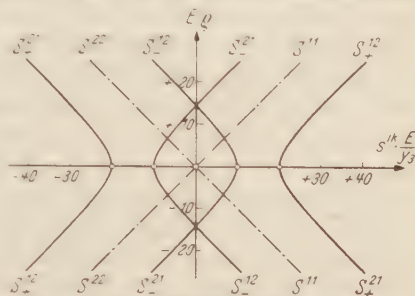


Fig. 5. Lage der Beugungsflecken auf einer Geraden eines Feinstrukturdreiecks in Abhängigkeit vom Anregungsfehler q .

vom Werte 0 aus zunehmen läßt, verschwindet dann bei $|q| \cdot E \sim (\Phi_0^2 - \Phi_g^2)^{1/2}$ und wächst schließlich bei sehr großem $|q|$ an. Die dynamisch konjugierten Fleckenpaare (Doppelbrechungskomponenten S^{1+}, S^{1-} bzw. S^{2+}, S^{2-} bzw. S^{3+}, S^{3-}) liegen also bei kleinem $|q|$ zusammen auf einer Seite der Geraden — rechts oder links vom Mittelpunkt M_3). Bei großem $|q|$ vertauschen die inneren Flecken ihre Plätze, so daß also die eine Komponente eines Paares links, die andere rechts von M_3 erscheint. Die inneren Flecken, welche bei kleinem $|q|$ natürlich außerhalb der Eckpunkte erscheinen, gehen beim Werte $|q| E \sim \frac{(\Phi_0^2 - \Phi_g^2)}{2\Phi_0}$ auf das Innere der Dreiecksseiten über. — Durch Hinzufügung der weggelassenen Glieder mit den kleinen Faktoren μ_i wird der Verlauf der Kurven in Fig. 5 nur wenig beeinflusst. Merkbarer werden diese Terme, wenn $[(qE)^2 + \Phi_g^2]^{1/2}$ nur eine mit $\Phi_0 \cdot \mu_i$ vergleichbare Größe hat.

In Fig. 5 sind auf der Abszisse Potentialgrößen aufgetragen, welche Summen oder Differenzen der Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E \gamma_j &\simeq \frac{1}{2} E \gamma_k \simeq \frac{1}{2} \Phi_0, \\ \frac{1}{2} E \delta_j &\simeq \frac{1}{2} E \delta_k \simeq \frac{1}{2} [(qE)^2 + \Phi_g^2]^{1/2} \end{aligned}$$

darstellen. Sie folgen aus den Winkelgrößen, Gl. (19), durch Multiplikation mit $E \gamma_i$. Geht man von den direkt gemessenen Größen aus, den Abständen der Flecken auf der Geraden \mathcal{Q} , im photographischen Bild, so kann man mit einem Maßfaktor

$$\kappa_i = \frac{E}{L \cdot \gamma_i} = \frac{E}{L} \frac{(\prod_j \cos \alpha_j)^{1/2}}{\sin \alpha_i} \quad [\text{Volt/mm}] \quad (20)$$

die gemessenen Längen in Potentiale umrechnen. Der letzte Ausdruck folgt aus Gl. (7). Diese Maßfaktoren für die drei Geraden müssen zunächst ermittelt werden, wenn man aus einer gegebenen Feinstrukturfigur die Strukturpotentiale berechnen will. Ferner müßte man, genau genommen, auch q nach Betrag und Vorzeichen, sowie die Zahlen μ_i kennen, deren Größe aber, wie im vorigen Absatz bemerkt wurde, eine geringe Rolle spielt. Dem Betrage nach sind sie übrigens leicht zu ermitteln, vgl. Gl. (18), aber ihre Vorzeichen sind die der entsprechenden Interferenzindizes g_i . In den allermeisten Fällen ist nun die experimentelle Situation so, daß die Vorzeichen der g_i , ebenso wie das von q aus Gründen der Meßgenauigkeit nicht sicher bestimmbar sind (vgl. Abschn. B 3). Dasselbe gilt dann für die Glieder mit μ_i in den Gln. (16), (17). Da sie das Ergebnis nur wenig beeinflussen, ist es möglich und auch konsequent, sie wegzulassen. Dann geht in die Gleichungen nur noch das mit Gl. (7) zu ermittelnde $|q|$ ein.

Die Auswertung kann nun z. B. so vor sich gehen: Man bestimmt auf der Platte längs der Dreiecksgeraden \mathfrak{A} den Abstand T^+ der außen liegenden, und den Abstand I^+ der inneren Doppelbrechungsflecken (vgl. Fig. 2). Nach den Gln. (16), (17), (19), (20) gilt dann z. B. für die Gerade \mathfrak{A}_3 :

$$T_+^3 \cdot \kappa_3 = \frac{1}{2} E (\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2} E (\delta_1 + \delta_2) \sim \Phi_0 + [(qE)^2 + \Phi_g^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (21a)$$

$$T_-^3 \cdot \kappa_3 = \left| \frac{1}{2} E (\gamma_1 + \gamma_2) - \frac{1}{2} E (\delta_1 + \delta_2) \right| \sim |\Phi_0 - [(qE)^2 + \Phi_g^2]^{\frac{1}{2}}|. \quad (21b)$$

Die letzten Formen entstehen bei Vernachlässigung der μ_i . Die Absolutstriche in der zweiten Gleichung müssen gesetzt werden, da man nicht von vornherein weiß, ob $|qE|$ kleiner oder größer als $|\Phi_0^2 - \Phi_g^2|^{\frac{1}{2}}$ ist. Mit anderen Worten: Man kann es den inneren Flecken nicht ansehen, mit welchem der äußeren Flecken jeder von ihnen dynamisch zusammengehört, d. h. durch Beugung im gleichen Kristallgebiet entstanden ist. Es ist also entweder die Summe beider Ausdrücke annähernd gleich $2\Phi_0$, und die Differenz entspricht $2[(qE)^2 + \Phi_g^2]^{\frac{1}{2}}$, oder umgekehrt. Der erste Fall gilt, wie man mit Hilfe von Fig. 5 überlegt, für kleine Anregungsfelder, also sternförmige Figuren und solche mit sehr kleinem Dreieck, die umgekehrte Zuordnung muß bei großem $|q|$, also großer Dreiecksfläche gewählt werden. In Grenzfällen wird man beide Möglichkeiten durchrechnen müssen und sehen, mit welcher Zuordnung man zu konstanten Ergebnissen für Φ_0 und Φ_g gelangt. Zweifelsfälle darf man bei der Mittelwertbildung nicht berücksichtigen.

Man darf bei diesem Näherungsverfahren dem Ergebnis der Auswertung einer einzelnen Figur nicht zu großen Genauigkeitswert beimessen; bei einem vollständigen Feinstrukturdreieck erhält man allerdings für jede der drei Geraden ein Paar von Mittelwerten Φ_0 , Φ_g , und die Mittlung gleicht den Einfluß der Vernachlässigungen mehr oder weniger

aus. Ein statistisches Verfahren (Mittelwertbildungen über die Ergebnisse vieler Ausmessungen) ist aber aus anderen, später zu besprechenden Gründen unbedingt notwendig.

In den seltenen Fällen, in welchen die Kristallstellung sicher bestimmbar ist, und damit die Vorzeichen von ϱ und μ_i zu ermitteln sind, kann man bei der Auswertung, unter Verwendung der angegebenen, genaueren Formeln (19), je zwei Wertepaare γ_i, δ_i ($i = 1, 2, 3$) erhalten, woraus sechs Paare von Meßwerten Φ_0, Φ_g resultieren (je zwei für jede Gerade). Auf Einzelheiten ist hier nicht einzugehen.

2. Auswertung unvollständiger Figuren.

Falls in einer Feinstrukturfigur nur Flecken auf zwei Geraden sichtbar sind¹, so läßt sich bei Berücksichtigung der Lagen dieser Flecken die fehlende Gerade rekonstruieren und die Auswertung durchführen. Wie man hierzu vorgehen kann, soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden.

Bei den Eingeradenreflexen, z.B. 00 h , ist eine Auswertung nur möglich, wenn auf den Geraden neben den beiden Paaren von Doppelbrechungsflecken ein Eckpunkt (Stachelpunkt) sichtbar ist (vgl. z.B. II, Fig. 3; man findet solche Geraden mit fünf Punkten übrigens relativ selten). Ferner kann man hier die Tatsache benutzen, daß sich bei unseren zahlreichen Auswertungen anderer Interferenzen des MgO Φ_0 als eine von den Indizes der Interferenz unabhängige Größe von ziemlich einheitlichem Wert erwiesen hat. Setzt man deren mittleren Meßwert als bekannt voraus, so läßt sich Φ_g ermitteln². Es gilt nämlich, für den Fall kleiner Anregungsfehler, nach G. (21)

$$T_+^3 + T_-^3 = \kappa_3^{-1} (\gamma_1 + \gamma_2) E \simeq 2\kappa_3^{-1} \cdot \Phi_0. \quad (22)$$

Daraus ist κ_3 zu entnehmen. $|\varrho|$ ergibt sich dann aus den durch Messung der Fleckenabstände erfaßbaren Größen

$$P_1^3 = P_2^3 \simeq \kappa_3^{-1} \cdot \frac{1}{2} |\varrho| \cdot E. \quad (23)$$

P_1^3 bzw. P_2^3 ist der Abstand des Stachelpunktes S^{11} bzw. S^{22} von dem Schwerpunkt der auf der Geraden \mathfrak{L}_3 liegenden vier Doppelbrechungsmaxima. Schließlich kann man Φ_g auf Grund von Gl. (21) aus der Differenz der äußeren und inneren Fleckenabstände,

$$T_+^3 - T_-^3 = 2\kappa_3^{-1} (\delta_1 + \delta_2) E \simeq 2\kappa_3^{-1} [(\varrho E)^2 + \Phi_g^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

berechnen.

¹ Die möglichen Gründe für das Auftreten unvollständiger Figuren sind in II, F diskutiert worden.

² Wir konnten inzwischen Φ_{002} von MgO auch gut ermitteln, ohne den Wert von Φ_0 voraussetzen zu müssen. Hierzu wurde eine Reihe von Aufnahmen benutzt, die am selben Kristall in gleicher Stellung bei verschiedenen Spannungen hergestellt waren. Näheres wird an anderer Stelle mitgeteilt werden.

3. Bemerkung über Mehrfachanregung.

Im Gegensatz zum Fall der Röntgeninterferenzen existiert bekanntlich bei der Elektronenbeugung kaum ein Gebiet der Einstrahlungsrichtungen, für welches der von uns allein in Betracht gezogene Zweistrahlenfall (Einfachanregung) ohne nähere Prüfung als Näherungsansatz akzeptiert werden darf. Relativ zur Wellenzahl ist das reziproke Gitter außerordentlich dicht, so daß die Ausbreitungskugel praktisch immer vielen Gitterpunkten nahe kommt. Den Fall, daß neben der Interferenz g weitere Interferenzen m schwächer angeregt sind, hat bekanntlich BETHE ¹⁴ durch Summierungen über das reziproke Gitter berücksichtigt. Er verwendet Ausdrücke der Art

$$\sum_{kl} = \sum_{\substack{m \\ = 0, \pm 1, \dots}}'' \frac{\varphi_{k-m} \varphi_{m-l}}{2 \varrho_m}, \quad \text{mit } k, l = 0, g \quad (25)$$

(vgl. dazu I, S. 454). Diese haben, sofern sie klein sind, den Charakter von Zusatztermen, die zu φ_0 bzw. φ_g hinzutreten.

Sind z.B. die Produkte $E \cdot \sum_{kl}$ von der Größenordnung 10^{-1} V, so kann man sicher die Ausdrücke (I, 12a, b) für γ_i und δ_i (unter Weglassung der kleinen Terme mit B, β_0) nach den \sum_{kl} entwickeln. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \gamma_i &\simeq \Phi_0 - \frac{1}{2} E (\sum_{gg} + \sum_{00}), \\ E^2 (\delta_i^2 - \varrho_g^2) &\simeq |\Phi_g - E \cdot \sum_{g0}|^2 - E^2 \cdot \varrho_g (\sum_{gg} - \sum_{00}). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Das sind diejenigen Größen, die man an Stelle von Φ_0 und Φ_g^2 wirklich messen würde.

An die Auswertung der BETH'schen Zusatzpotentiale zu gehen, hat nur Sinn, wenn man aus der Feinstrukturfigur das Vorzeichen von ϱ_g sicher entnehmen kann, und auch im übrigen die Kristallstellung recht genau bestimmbar ist. Aus unserem Erfahrungsmaterial können wir schließen, daß diese Funktionen in vielen Fällen nur kleine Werte haben. Es ist übrigens plausibel, und auch durch unsere Experimente belegt, daß man bei der statistischen Auswertung von vielen Feinstrukturaufnahmen mit verschiedenen Kristallstellungen über die Beiträge der Zusatzpotentiale wegmittelt. Für die Bestimmung von Φ erweist sich eine solche Mittelung als prinzipiell notwendig.

D. Ergebnisse.

1. Allgemeine Bemerkungen über die Ausmessung der Feinstrukturfiguren.

Die Messungen wurden an den Originalplatten in einem mit einer Winkelmeßplatte ausgerüsteten Koordinaten Meßmikroskop bei 50- bis 50-facher Vergrößerung ausgeführt. Wir haben im allgemeinen nur solche Figuren ausgemessen, in welchen sich die Lagen der Dreiecksgeraden und die Abstände der Beugungsstellen auf denselben auf $\pm 5 \mu$, die

Winkel α_i auf $\pm 1^\circ$ (oder besser) festlegen ließen; bei einer geringen Zahl von Aufnahmen wurden diese Genauigkeitsgrenzen unterboten.

Bei vollständigen Dreiecksfiguren lassen sich auf Grund der angegebenen Ungenauigkeit der Winkelbestimmung die geometrischen Größen β_i , Gl. (6b), und die Potentialmaßstäbe α_i , Gl. (20), auf 2 bis 3% genau berechnen. E bzw. λ (aus den Radien der 200-Ringe) und der Abstand L zwischen Objekt und Platte sind leicht mit der gleichen Genauigkeit zu ermitteln. Die Hauptfehlerquelle bilden die Abstandsmessungen der Beugungsflecken. Da die Potentialmaßstäbe α_i Werte zwischen 30 und 70 V/mm haben, bedeutet die angegebene Unsicherheit von $\pm 5 \mu$ der Abstandsmessungen eine durchschnittliche Ungenauigkeit von $\pm 0,3$ V für die entsprechenden Potentiale. Die Größen $|q| \cdot E$, Φ_0 und $|q \cdot E|^2 + \Phi_s^2$ sind Summen oder Differenzen von solchen Abstandsmessungen proportional. Man wird im Durchschnitt für eine Einzelbestimmung von $|q| \cdot E$ und Φ_0 einen mittleren Fehler von etwa 0,4 V erwarten können. Die Unsicherheit der Φ_s -Bestimmung wird 0,4 bis 0,7 V betragen, sofern $|q| \cdot E \lesssim \Phi_s$ ist; größere Anregungsfehler verursachen natürlich größere Streuungen¹.

2. Auswertungsbeispiele (220-Interferenzen des MgO).

Die Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse der Auswertung von fünf Feinstrukturfiguren der 220-Interferenz von MgO, welche vollständig sind, d.h. die sechs Paare von Doppelbrechungsflecken zeigen, welche die Theorie erwarten läßt. Es sind Fälle ausgewählt, in welchen wir die Kristallstellung als besonders sicher ermittelt ansehen, und deshalb auch die Vorzeichen der Anregungsfehler q angeben können (Spalte 7). Als Beleg hierfür ist in Spalte 4 die Winkeldifferenz 1ϵ wiedergegeben; das ist die Abweichung des gemessenen Richtungswinkels ϵ_3 der annähernd radial verlaufenden Dreiecksgeraden \mathfrak{U}_3 , definiert durch Gl. (12), von dem unter Einsetzung der g_i und β_i nach Gl. (13) berechneten Wert; vgl. dazu Abschn. B 3. Die Kleinheit von 1ϵ charakterisiert die Genauigkeit, mit der die Kristallstellung bestimmt ist. Weiter sind für jede Figur die sechs einzelnen Werte Φ_0 bzw. Φ_g in die Tabelle aufgenommen (Spalte 8, 9), die sich aus den von den Mitten der Seiten her gerechneten Abständen der Beugungsflecken ergeben; Gl. (19). Daneben stehen jeweils die Mittelwerte der sechs Potentialbestimmungen.

Durch diese Beispiele soll gezeigt werden, inwieweit sich im allgemeinen die experimentellen Tatsachen mit den Aussagen der Theorie

¹ Das mittlere Fehlerquadrat einer Φ_s -Bestimmung mußte unter sonst gleichen Umständen etwa proportional zu $\left[1 + 2\left(\frac{qE}{\Phi_s}\right)^2\right]$ sein.

Tabelle 1. Auswertung von 220-Feinstrukturen des Magnesiumoxyds.

Nr.	$g_1 g_2 g_3$	E	Δs	β_1 β_2 β_3	α_1 α_2 α_3	$\varrho \cdot E$	Φ_0	Φ_g
		kV	min		Volt mm	Volt	Volt	Volt
2	$\bar{2}20$	45,25	21'	0,576	59,4	- 0,85	14,5	5,2
				0,549	61,0		15,7	5,5
							16,0	5,7
				0,606	58,1		16,7	5,6
95	$\bar{2}20$	45,0	32'			+ 5,60	15,1	5,4
							15,3	5,2
				0,591	57,1		15,6	5,5
				0,631	55,6		15,2	5,4
74	$\bar{2}20$	45,0	25'	0,503	62,6	- 5,86	14,7	4,4
							15,7	4,4
							14,8	4,9
				0,556	59,9		13,6	5,0
133	$\bar{2}20$	45,0	11'	0,547	60,4	- 9,21	14,6	5,2
							13,8	5,5
				0,626	56,6		14,1	5,5
							14,9	5,2
31	$\bar{2}20$	45,1	12'	0,608	56,0	+ 25,70	14,5	4,0
				0,625	55,4		15,2	6,2
							15,6	5,1
				0,490	63,2		15,5	4,2
31	$\bar{2}20$	45,1	12'			+ 25,70	16,0	6,8
							14,2	2,9
				0,607	56,9		15,2	10,3
				0,607	57,0		14,9	2,7
31	$\bar{2}20$	45,1	12'			+ 25,70	16,9	8,5
				0,512	62,5		15,9	8,7
							14,6	6,3
							15,9	7,2

zur Deckung bringen lassen. Die Fig. 6 bringt das auch graphisch zum Ausdruck (für das 1., 3. und 5. Beispiel der Tabelle 1). Hier bedeuten die Kreise die gefundenen Beugungsmaxima, während die an den Geraden angebrachten Querstriche die aus den gemittelten Resultaten für Φ_0 und Φ_g rückwärts berechneten Lagen der Flecken darstellen. In den unteren Teilen der Figuren ist die jeweilige Lage des Kristalls angedeutet.

Bei dem letzten Beispiel der Tabelle 1 handelt es sich um eine Interferenz mit besonders großem Anregungsfehler¹. Daraus erklärt sich die

¹ Gelegentlich haben wir 220-Interferenzen mit Anregungsfehlern ϱE über 50 V angenommen ($\varrho \cdot E \approx 6\Phi_g$). Da die Intensität bekanntlich etwa proportional zu $1 : (\varrho E / \Phi_g)^{2+4}$ abnimmt, braucht man für solche Aufnahmen sehr lange Belichtungszeiten. Sie zeigen häufig sehr scharfe Flecken, so daß sie für die Bestimmung der Kristallstellung und des Brechungspotentials Φ_0 gut geeignet sind.

besonders große Schwankung der Φ_g -Bestimmungen. Im ganzen liegt hier aber Φ_g sicher zu weit oberhalb des Mittelwertes 5,3 V aller fünf Auswertungen; bei dem 2. Beispiel der Tabelle 1 wohl deutlich darunter. Eine ähnliche Abweichung nach unten bemerkt man bei dem Φ_0 -Wert 14,3 V des 3. Beispiels (gegenüber dem Mittelwert 15,4). Solche, und auch drastischere Differenzen haben wir nicht selten beobachtet; einige Zahlen werden weiter unten angegeben. Es erscheint uns sicher, daß

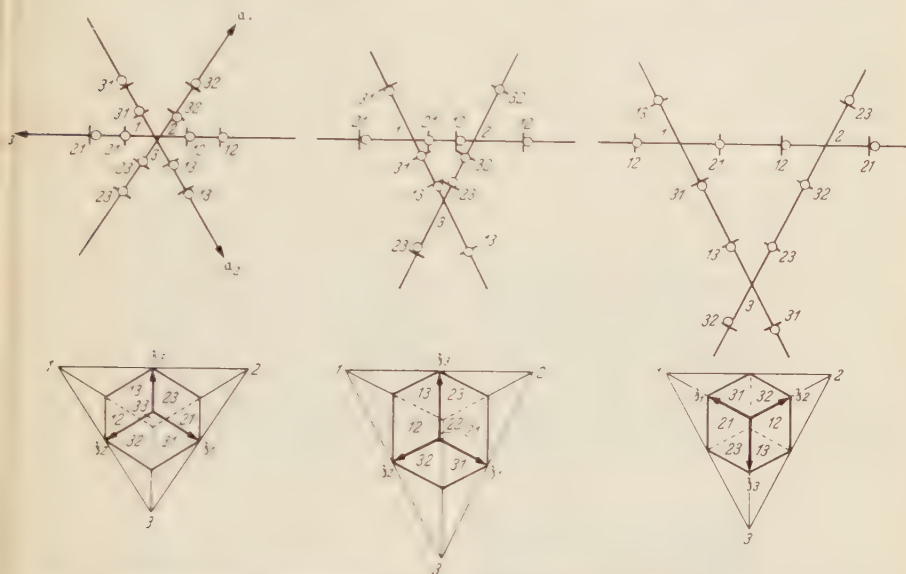


Fig. 6. Drei Beispiele für Feinstrukturfiguren der Interferenz 220, dem 1., 3. und 5. Fall der Tabelle 1 entsprechend.

wir es in diesen Fällen mit Störungen infolge von Mehrfachanregung zu tun haben.

Wir haben versucht, diese Vermutung an dem Beispiel der Fig. 7 zu bestätigen. Hier handelt es sich um Interferenzfiguren, die auf drei mit demselben MgO-Präparat, aber bei verschiedenen Elektronengeschwindigkeiten hergestellten Aufnahmen an entsprechenden Stellen des 220-Ringes auftraten. Die Beschleunigungsspannungen E und Wellenlängen λ sind in Tabelle 2, Spalte 2 und 3 angegeben. Setzt man voraus, daß die drei Figuren vom selben Kristall stammen, und daß dessen Stellung unverändert geblieben ist, so ist das positive Vorzeichen des Anregungsfehlers q evident, denn q wird mit wachsender Spannung größer (vgl. dazu B 3 und Fig. 4). Man schließt das aus dem Anwachsen der Fläche des Feinstrukturdreiecks ($\sim q^2$); ferner z. B. aus der Zunahme des Abstandes der beiden Flecken auf der horizontal liegenden Geraden, dem Abszissenabstand der beiden Kurven S_+^{12} und S_-^{12} in Fig. 5

Tabelle 2. $\bar{2}20$ -Interferenzen desselben MgO-Kristalls in gleicher Lage bei verschiedenen Elektronengeschwindigkeiten.

Nr.	E	λ	qE	β_{01}	β_{02}	β_{03}	Φ_0	Φ_g	β_{00}	β_{01}	$E \cdot 2g_0$
	kV	10^{-8} Å	Volt				Volt	Volt	Volt	Volt	Volt
324	46,8	5,54	11,9	0,488	0,524	0,698	(17,0)	16,6	(6,6)	5,9	-0,32 -0,02 -0,23
325	54,2	5,13	16,7	0,490	0,527	0,695	(17,0)	17,2	(7,2)	5,9	+0,20 -0,27 -0,28
326	62,0	4,78	21,9	0,489	0,527	0,695	(16,6)	16,3	(7,2)	6,3	-0,32 -0,23 -0,17
Mittelwerte:				0,489	0,526	0,696	16,7	6,0			

entsprechend¹. Bei positivem q kann man das Indextripel der Interferenz zu $\bar{2}20$ festlegen, wenn man die Eckpunkte nach Fig. 7d beziffert². Wir haben nun q nach Gl. (7) aus den gemessenen A_i und α_i berechnet

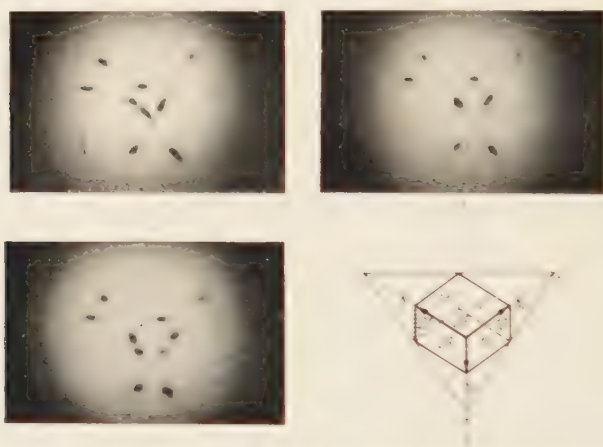


Fig. 7 a-c). Drei Aufnahmen der $\bar{2}20$ -Interferenzen desselben MgO-Kristalls in gleicher Lage bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen: (a) 46,8, (b) 54,2, (c) 62,0 kV. (d) Stellt die Lage des Kristalls und die Richtung des einfallenden Strahles dar.

(Spalte 4). Mit Hilfe dieser Werte wurden dann die Richtungscosinus des einfallenden Strahles, $\beta_{0i} = (\hat{z}_0, \hat{z}_i)$, ermittelt. Mit der Indizierung $\bar{2}20$ nimmt nämlich Gl. (8a) die Form an

$$\frac{1}{2} (\beta_{01}^2 + \beta_{02}^2 - \beta_{03}^2) = \frac{1}{2} \frac{q}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda}$$

¹ Das andere Paar von dynamisch konjugierten Beugungsflecken, das auf dieser Geraden \mathcal{M}_1 eigentlich erscheinen sollte, ist hier nicht sichtbar. Das liegt offenbar daran, daß das an eine Kante angrenzende Kristallgebiet (in Fig. 7d durch Querschraffierung gekennzeichnet) nicht durchstrahlbar ist, wahrscheinlich weil dort das Kriställchen mit anderen verwachsen ist.

² Der Primärstrahl ist immer rechts von unseren Figuren zu denken.

darin bedeutet a_w die Gitterkonstante des MgO ($a_w = 4,205 \text{ \AA}$). Ferner erwies sich

$$\frac{1}{2}(\beta_{02} + \beta_{01}) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha_3 (\operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha_1 + \operatorname{ctg}^{\frac{1}{2}} \alpha_2)$$

[vgl. (6b)] bei den drei Aufnahmen als innerhalb der Fehlergrenzen invariant. Somit konnten die β_{0i} in den Spalten 5, 6, 7 der Tabelle 2 angegeben werden. Deren Mittelwerte stehen in der letzten Zeile; die Kristallorientierung ist in der Tat bei den drei Aufnahmen innerhalb der Meßgenauigkeit erhalten geblieben.

Die nach der in Abschn. C 1 geschilderten Methode (d.h. ohne Berücksichtigung der Mehrfachanregungen) ermittelten Werte der Potentialgrößen Φ_0 und Φ_s stehen als eingeklammerte Zahlen in den Spalten 8 und 9 der Tabelle 2. Beide erscheinen unnorm groß; insbesondere das so berechnete Φ_s^1 liegt weit oberhalb des theoretischen Wertes 5,4 V (das ist der aus HARTREEschen Atomeigenfunktionen berechnete FOURIER-Koeffizient für die 220-Interferenz von MgO) und des Mittelwertes 5,3 V für die fünf Auswertungen der Tabelle 1. Da die Bestimmung der Kristallorientierung bei unserem Beispiel als ziemlich sicher angesehen werden konnte, lag es nahe, durch Auswertung der Zusatzsummen Gl. (29), von denen in Abschn. C, 3 die Rede war, den Einfluß der Mehrfachanregungen gemäß Gl. (26) zu berücksichtigen. Die Spalten 8 und 9 der Tabelle 2 zeigen das Ergebnis (nicht eingeklammerte Zahlen). Die Korrektur wirkt zum mindesten bei Φ_s deutlich in dem erwarteten Sinne einer Verkleinerung der Werte². Diese bleiben zwar noch etwas zu hoch; die Abweichungen vom theoretischen Wert liegen aber sicher innerhalb des wahrscheinlichen Meßfehlers.

Bei der Auswertung der genannten Summen wurden die aus der HARTREE-Verteilung berechneten Strukturpotentiale zugrunde gelegt. Die „Resonanznenner“ der einzelnen Summenterme (Anregungsfehler q_m der Interferenz $m = m_1, m_2, m_3$) sind durch die Formel

$$q_m = -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{a_w} \right)^2 \sum_j m_j^2 - \left(\frac{\lambda}{a_w} \right) \sum_j m_j \beta_{0j} \quad (27)$$

gegeben, welche der Gl. (8a) entspricht. Wegen ihrer kleinen Struktur-faktoren konnten bei den Summierungen die Terme mit ungeraden Indextripeln weggelassen werden; bei den geraden sind wir bis $m = 842$ gegangen. Zu jeder Summe gaben sieben Terme merkbare Beiträge, nämlich diejenigen mit den Indizes: $\bar{2}20, \bar{2}42, 440, \bar{4}24, \bar{2}44, 064, 284$.

¹ Wir bemerken, daß selbst unter Berücksichtigung der großen Anregungsfehler bei diesem Beispiel der durch die Ungenauigkeit der Abstandsmessungen bedingte, wahrscheinliche Fehler der berechneten Φ_s -Werte nicht größer als 1 V sein kann.

² Die Werte des inneren Potentials Φ_0 werden in Abschn. D, 4 diskutiert.

Die berechneten Werte der „Zusatzpotentiale“

$$E \cdot \left(\sum_{g \neq 0} \pm \sum_{000} \right) = \frac{1}{4} \sum_{m(\neq 0, g)} \frac{\Phi_m^2}{E \cdot \varrho_m} \quad \text{und} \quad E \cdot \sum_{g=0} = \frac{1}{2} \sum_{m(\neq 0, g)} \frac{\Phi_m \Phi_{-m}}{E \cdot \varrho_m}$$

sind in den Spalten 10 bis 12 der Tabelle 2 aufgeführt. — Es muß allerdings bemerkt werden, daß bei dem Beispiel der Fig. 7 die Anwendung des Verfahrens, welches auf *schwache* Mehrfachanregung beschränkt ist, genau genommen nicht ganz statthaft erscheint. Bei der von uns ermittelten Lage des Kristalls mußten nämlich neben 220 die Interferenzen 440 und 424 ziemlich stark angeregt sein. An den entsprechenden Stellen auf dem 440- und 442-Ring sind aber starke und scharfe Interferenzfiguren nicht zu sehen; möglicherweise hat zu deren Abbildung die Expositionsdauer nicht ausgereicht¹. Bei den in Fig. 7 wiedergegebenen 220-Figuren müßte sich andererseits die Anregung von vier Wellenfeldern durch eine zusätzliche, dreifache Aufspaltung der Flecken bemerkbar machen. Davon ist ebenfalls nichts zu sehen, und wir glauben aus dieser experimentellen Feststellung von nur zwei Wellenfeldern die Berechtigung zur Anwendung des geschilderten Verfahrens herleiten zu können. Es erscheint uns denkbar, daß sich die Einflüsse mehrerer Nebeninterferenzen bei speziellen Einfallsrichtungen gegenseitig kompensieren. Es läßt sich übrigens theoretisch begründen², daß unter speziellen Bedingungen bei simultaner Anregung mehrerer Interferenzen nur zwei Wellenfelder im Kristall erregt werden; das vorliegende Beispiel ist aber für eine theoretische Behandlung zu kompliziert.

3. Die Strukturpotentiale des Magnesiumoxydes.

Das Gesamtergebnis unserer Φ_g -Bestimmungen ist in der Tabelle 3 zusammengefaßt. Dort stehen in Spalte 2 die Anzahlen der für jede Interferenz ausgewerteten Feinstrukturfiguren. Es sind, natürlich abgesehen von den Interferenzen 200 und 400, durchweg Dreigeradenfiguren zur Auswertung herangezogen worden, bei denen sich die Kristallstellung und der Anregungsfehler gut bestimmen ließ. Einige davon zeigten nicht die nach der Theorie maximal zu erwartende Anzahl von sechs Fleckenpaaren. Wir geben in Spalte 3 die Gesamtzahlen der in die Bildung der einzelnen Mittelwerte eingehenden Abstandsmessungen an. Zur Berechnung der Mittelwerte (Spalte 4) wurden die Einzelergebnisse mit Gewichtungsfaktoren versehen, welche die Genauigkeit der Messungen und insbesondere den Einfluß des Anregungsfehlers auf den mittleren Fehler der Einzelergebnisse berücksichtigen. Die in Spalte 4 stehenden Fehlergrenzen sind die aus der Ausgleichsrechnung resultierenden, mittleren Fehler der Mittelwerte. Um uns die Angabe ganzer

¹ Die Strukturfaktoren dieser Interferenzen (1,7 bzw. 4,5 V) sind, verglichen mit Φ_{220} (= 5,4 V), ziemlich klein.

Tabelle 3. Strukturpotentiale Φ_g von MgO-Kristallen, ermittelt aus Interferenzfeinstrukturen.

Indizes der Interferenz	Anzahl der ausgewerteten Feinstrukturfiguren	Anzahl der vermessenen Fleckenabstände	Strukturpotential Φ_g (Volt)			
			Unsere Auswertungen		HONJO und MIHAMA [8]	Theoretisch (HARTREE) 293° K
			Mittelwert	Mittlere Streuung der Einzelwerte		
111	4	18	$1,25 \pm 0,15$	0,3	$\sim 1,7$	1,20
200	21	42	$7,55 \pm 0,2$	0,35	~ 7	7,77
220	34	198	$5,09 \pm 0,13$	0,35	5,5	5,14
222	13	46	$3,5 \pm 0,3$	0,65	4,2	3,92
400	8	16	$2,6 \pm 0,6$	1,0		3,15
420	5	28	$2,4 \pm 0,3$	0,5		2,61
422	3	17	$2,0 \pm 0,7$	0,8		2,24
440	3	18	$2,1 \pm 0,4$	0,9		1,70
442	2	12	$2,0 \pm 0,6$	1,0		1,50
640	1	4	(1,5)			0,99
642	3	18	(1,0)			0,90

Meßreihen zu ersparen, haben wir in Spalte 5 noch die mittlere Streuung der Einzelergebnisse angeführt; diese Angaben beziehen sich auf den normalen Fall, daß $|q \cdot E|$ von der gleichen Größenordnung wie $|\Phi_g|$ ist. — Die Strukturpotentiale der Interferenzen 200 und 400 sind aus Eingeraden-Figuren bestimmt, welche fünf Maxima zeigen (vgl. Abschnitt C, 2). Hier mußte in die Berechnung der Mittelwert der von uns für die anderen Interferenzen ermittelten Brechungspotentiale Φ_0 eingeführt werden, unter der Annahme, daß es sich dabei um eine von den Interferenzindizes unabhängige Größe handelt (vgl. dazu den folgenden Abschnitt). Die angegebenen Zahlen für Φ_{200} und Φ_{400} sind mit dem entsprechenden Vorbehalt zu betrachten¹. — Bei den anderen Interferenzen liegt der Auswertung neben den Daten E bzw. λ und L (— Abstand Objekt — Platte) nur die bekannte Struktur des MgO ($a_w = 4,205 \text{ \AA}$) und die Annahme der kubischen Kristalltracht zugrunde. Es ist übrigens zu bemerken, daß wir die Beschleunigungsspannung E zwischen 30 und 63 kV und die Strahlintensität innerhalb eines Faktors 5 variiert haben; eine Abhängigkeit der Ergebnisse von diesen Bedingungen war nicht wahrnehmbar.

Zum Vergleich führen wir in Spalte 6 einige Φ_g -Werte an, die von HONJO und MIHAMA [8] mit einer ähnlichen Methode aus der Interferenzbrechung ermittelt worden sind; ferner in Spalte 7 theoretische Werte, berechnet aus den HARTREESchen Elektronendichteverteilungen für die Ionen Mg^{2+} und O^{2-} , für Raumtemperatur korrigiert. Die Umrechnung von experimentellen RÖNTGEN-Strukturfaktoren (BRILL, HERMANN und PETERS [10]) führt übrigens auf Strukturpotentiale, die sich, abgesehen

¹ Vgl. Fußnote 2 auf S. 595.

von den ungeraden Ordnungen, nicht wesentlich von den Zahlen der Spalte 7 unterscheiden; für Φ_{111} erhält man aus den RÖNTGEN-Messungen 2,14 V (mit Korrektur für die Temperaturbewegung der Kerne).

Der Vergleich der Spalten 4 und 7 der Tabelle 3 scheint uns im ganzen die Richtigkeit der theoretischen Grundlagen zu bestätigen. Das Ergebnis für Φ_{220} übertrifft hinsichtlich seiner Genauigkeit diejenigen für die anderen Interferenzen, bei welchen wegen der kleineren Strukturfiguren und nicht so günstiger, geometrischer Bedingungen Feinstrukturfiguren mit drei Geraden und mit scharfen Flecken innerhalb erträglicher Belichtungszeiten seltener herstellbar waren. Die Zahlen für die kleineren Strukturpotentiale (eingeklammert in Spalte 4) sind aus zu wenigen und unsicheren Messungen ermittelt; hier war die Angabe von Fehlergrenzen nicht gerechtfertigt. Bei den ungeraden Indizes war, abgesehen von 111, wegen der Kleinheit der Potentiale eine Bestimmung nicht mehr möglich. Aus der Übereinstimmung der Zahlen für 220 darf man wohl schließen, daß die Temperatur der MgO -Kriställchen bei der angewandten, schwachen Bestrahlung nicht wesentlich über Raumtemperatur gelegen haben kann. Unsere Fehlergrenzen bei dieser Interferenz können mit denjenigen röntgenographischer Bestimmungen konkurrieren. Es erscheint uns angebracht, daß man künftig die Feinstruktur der Elektronenbeugung bei Kristallstrukturbestimmungen hinzuzieht; man könnte sich damit von der Notwendigkeit absoluter Intensitätsmessungen befreien.

4. Das Brechungspotential des Magnesiumoxydes.

Für die Bestimmungen des Potentials Φ_0 der gewöhnlichen Elektronenbrechung, die in Tabelle 4 wiedergegeben sind, haben wir Fein-

Tabelle 4. Brechungspotential Φ_0 von MgO -Kristallen, ermittelt aus Interferenzfeinstrukturen.

Indizes der Interferenz	Anzahl der ausgewerteten Feinstrukturfiguren	Φ_0 (Volt) (Mittelwerte)	Mittlere Streuung der Einzelwerte
111	4	15.6 \pm 0.6	1.3
220	33	15.52 \pm 0.13	0.7
311	3	17.7 \pm 0.6	1.0
222	13	14.7 \pm 0.25	0.8
331	3	15.7 \pm 0.6	1.0
420	6	16.0 \pm 0.4	0.9
422	3	14.4 \pm 0.35	0.6
333/511	3	14.2 \pm 0.6	1.0
440	5	14.7 \pm 0.3	0.7
442, 600	2	18.0 \pm 0.4	0.5
444	1	(16.0)	
620	1	(16.0)	
640	1	(15.2)	
642	1	(13.5)	

strukturfiguren mit drei Geraden benutzt, und zwar zum Teil auch solche, bei denen eine Ermittlung von Φ_z nicht möglich war, wegen zu schwacher Aufspaltung oder zu großen Anregungsfehlers. Es wurden nur solche Figuren von der Mittelwertbildung ausgeschlossen, bei denen die Zuordnung von Φ_0 und Φ_z zu den Fleckenabständen nicht eindeutig möglich, oder der Verdacht auf das Vorliegen starker Mehrfachanregung sicher zu begründen war.

Die Zahlen in Spalte 3 der Tabelle 4 sprechen dafür (oder nicht deutlich dagegen), das Potential Φ_0 als eine von den Interferenzindizes unabhängige Konstante anzusehen. Mittelt man dementsprechend über alle ausgeführten Φ_0 -Bestimmungen, so ergibt sich:

$$\Phi_0 = 15,3 \pm 0,2 \text{ V.}$$

Der Vergleich mit theoretisch berechneten Werten fällt nun sehr ungünstig aus, wenn man Φ_0 mit dem „mittleren Potential“ des Kristalls (Mittelwert des Potentials im Innern eines genügend großen Kristalls) identifiziert. Berechnungen dieser Größe, die auf der Grundlage der experimentellen RÖNTGEN-Strukturfaktoren des MgO [10], auf unsere Veranlassung ausgeführt wurden¹, ergaben die Werte (a) 10,6 bzw. (b) 12,7 V, je nach der vorausgesetzten Funktion der Ladungsverteilung in den äußeren Teilen der kugelsymmetrisch angenommenen Ionen²; die Fehlergrenzen der Berechnung sind ziemlich groß, überschreiten aber keinesfalls $\pm 15\%$. Ähnliche Berechnungen von KEHOE³ und von HONJO und MIHAMA [8], auf der Grundlage der HARTREESchen Verteilungen und nach der Methode von TULL [11], führten zu den Werten: 9,8 bzw. 12,8 V. Es ist anzunehmen, daß das *mittlere Potential* des MgO-Kristalls in der Nähe von 12 V liegen dürfte, weit unter unserem Meßwert Φ_0 .

Eine experimentelle Bestimmung des Brechungspotentials von MgO mit der Reflexionsmethode bei streifend einfallenden Elektronenstrahlen ist von KEHOE [12] ausgeführt worden³. Es ergab sich der Wert: $15,3 \pm 1,2 \text{ V}$. Bemerkenswerterweise hat KEHOE bei Einschaltung eines „dechargers“ (zusätzliche Glühkathode, welche in der Nähe des Objektes

¹ Für die Ausführung der Rechnung sind wir Herrn H. FENGLER zu Dank verpflichtet.

² Zum Werte (a) führt die Annahme, daß die Verteilungsfunktion für eine Elektronenschale des Ions proportional zu $\exp(-\text{const} \cdot r^2)$ anzusehen ist (TULL [11]); im Falle (b) sind wasserstoffähnliche Eigenfunktionen zugrundegelegt, $\varrho \sim \exp(-C \cdot r)$. Die Konstanten sind für die einzelnen Schalen in beiden Fällen so abgeglichen, daß die von BRILL und Mitarbeiter [10] bei MgO gemessenen Röntgen-Strukturfaktoren durch den Ansatz möglichst gut bestätigt werden. Letzteres ist übrigens bei Wahl der Methode (a) nicht gut zu erreichen.

³ Für die Zusendung des Manuskriptes von Mr. KEHOE vor dessen Veröffentlichung und die Mitteilung weiterer Einzelheiten sind wir Herrn Dr. M. BLACKMAN, London, zu bestem Dank verpflichtet.

langsame Elektronen und Ionen erzeugt) den wesentlich niedrigeren Wert: $12,7 \pm 0,6$ V erhalten.

Zur Diskussion der Meßgröße Φ_0 wollen wir uns auf die kritische Untersuchung über das mittlere Potential in Raumgittern beziehen, die bekanntlich M. v. LAUE [13] durchgeführt hat. Danach läßt sich die Existenz eines räumlich konstanten, mittleren Potentials¹ zwar nicht im allgemeinen Falle behaupten, aber z. B. sicher für Kristalle des kubischen Systems, wie MgO. Voraussetzung für seine Berechnung ist, daß die Gitterperiodizität der Ladungsverteilung streng bis zur Grenzfläche des Kristalls gilt. Die bekannte Formel von BETHE [14], welche auch den oben angeführten Berechnungen zugrunde liegt, gibt dann das mittlere Potential des Raumgitters richtig wieder, wenn man die Ladungsverteilung mit genügender Annäherung durch Überlagerung kugelsymmetrischer Atome (oder Ionen) beschreiben kann, deren Zentren bis zur Grenzfläche an den idealen Gitterpunkten liegen. Es gilt nun im wirklichen Kristall mit Sicherheit in der Oberfläche und in deren Nähe Strukturabweichungen, und zwar sowohl Verlagerungen der Kerne, wie Deformationen der Elektronenhüllen; hinzu kommen möglicherweise adsorbierte Fremdatome oder -ionen, sowie Elektronendefektstellen, die infolge von Sekundäremission entstehen können. Alle diese Strukturabweichungen können, sofern sie genügend gleichmäßig über die Kristalloberfläche verteilt sind, in ihrer Wirkung näherungsweise durch eine homogene, elektrostatische Doppelschicht beschrieben werden, welche den Kristall umgibt. Nach der Potentialtheorie würde das einem im Inneren konstanten Potentialbeitrag bedeuten, der sich dem mittleren Gitterpotential überlagern würde.

Unsere Experimente scheinen uns jedenfalls für die Richtigkeit dieser Annahme zu sprechen. Wir haben in die Größe Φ_0 von vornherein als Konstante eingeführt und gezeigt, daß die dynamische Theorie unter dieser Voraussetzung die experimentellen Ergebnisse im ganzen sehr befriedigend wiedergibt. Die Differenz zwischen dem von uns gefundenen Brechungspotential Φ_0 (≈ 15 V) und dem theoretischen, mittleren Potential (≈ 12 V) dürfte also auf Strukturabweichungen von zunächst ungeklärter Natur in der Oberfläche zurückzuführen sein, diese äußern sich wie eine homogene Doppelschicht auf der Oberfläche, welche die negative Belegung außen trägt.

¹ Dieses ist definiert als Mittelwert des elektrostatischen Potentials, gebildet durch Integration über einen den jeweiligen Aufpunkt umgebenden Bereich von der Größe der Grundzelle. Räumlich konstant kann diese Funktion natürlich nur in solchen Partien des Kristalls sein, die nicht zu nahe an den Grenzflächen liegen. Zum Vakuum hin gibt es keinen Sprung, sondern einen stetigen Übergang. Diesen Umstand wollen wir aber hier außer Betracht lassen, da er bei unseren Experimenten wegen des steilen Eintritts und Austritts der Elektronenstrahlen sicher unwesentlich ist.

Diese Feststellung gilt annähernd unter den von uns realisierten, experimentellen Bedingungen: Der Elektronenstrahl durchläuft dabei die Grenzflächen des durchstrahlten Kristalls mit Neigungswinkeln, die im allgemeinen zwischen 30 und 60° liegen; die Beschleunigungsspannung variiert zwischen 30 und 60 kV, die Strahlintensität innerhalb eines Faktors 5 (Kathodenstrom zwischen 30 und 150 μ A). Ein Verdacht auf eine gewisse Abhängigkeit von Φ_0 vom Durchstrahlungswinkel, und damit von den Indizes der Interferenz, ist bei Betrachtung der Tabelle 4 nicht ganz auszuschließen; das müßte durch weitere Experimente präzisiert werden. Die Tatsache, daß wir bei Variation des Strahlstromes keine deutliche Änderung des gemessenen Φ_0 feststellen konnten, ist ein Argument gegen die Vermutung von KEHOE [12], die verstärkte Brechung käme im wesentlichen durch Sekundärelektronen-Emission des Kristalls zustande¹. Wir glauben eher, die Doppelschicht läßt sich auf eine Polarisierung der Oberfläche zurückführen (verschiedene Verlagerung der positiven und negativen Ionen; Deformationen der Elektronenhüllen); hinzu kommen zweifellos die Wirkungen adsorbierter Schichten oder anderer Störungen der Oberflächenstruktur. Als Stütze der letzten Vermutung können wir anführen, daß wir des öfteren bei einzelnen Kristall-Individuen anomale Φ_0 -Werte gefunden haben; so ergaben sich für einen Kristall, dessen 220-Interferenz wir in sieben Aufnahmen bei verschiedenen Spannungen und etwas veränderten Einstrahlungsrichtungen untersucht haben, durchweg Werte zwischen 16 und 17 V. Das muß man wohl mit der besonderen Oberflächenbeschaffenheit des betreffenden Kristalls in Zusammenhang bringen, die er auf Grund seiner Entstehungsbedingungen besitzt.

Im ganzen muß festgestellt werden, daß der Charakter der Meßgröße Φ_0 zunächst nicht sicher geklärt werden kann. Die von uns angewandte Methode bietet zweifellos auf diesem Gebiete Möglichkeiten zu weiteren Untersuchungen.

Literatur.

- [1] KOSSEL, W., u. G. MÖLLENSTEDT: *Ann. Physik* **36**, 113 (1939). — [2] MCGILLAVRY, C. H.: *Physica*, Haag **7**, 329 (1940). — [3] LAUE, M. v.: *Naturwiss.* **28**, 645 (1940). — [4] MOLIÈRE, K., u. H. NIEHRS: *Z. Physik* **137**, 445 (1954). — [5] ALTENHEIN, H. J., u. K. MOLIÈRE: *Z. Physik* **139**, 103 (1954). — [6] ALTENHEIN, H. J.: *Diss. TU Berlin* 1953. — [7] ALTENHEIN, H. J., K. MOLIÈRE u. H. NIEHRS: *Naturwiss.* **39**, 447 (1952). — [8] HONJO, G., u. K. MIHAMA: *J. Phys. Soc. Jap.* **9**, 184 (1954). — [9] NIEHRS, H.: *Z. Physik* **139**, 88 (1954). — [10] BRILL, R., C. HERMANN u. CL. PETERS: *Z. anorg. Chem.* **257**, 151 (1948). — [11] TULL, V. F. D.: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **206**, 232 (1951). — [12] KEHOE, R. B.: *Proc. Phys. Soc. Lond.* Eingereicht. — [13] LAUE, M. v.: *Materiewellen und ihre Interferenzen*, Kap. 18. Leipzig 1948. — [14] BETHE, H.: *Ann. Physik* **87**, 55 (1938).

Berlin-Dahlem, Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft.

¹ Die Wirkungsweise des „dechargers“ könnte darin bestehen, daß das Moment der Doppelschicht durch Ionenadsorption geändert wird.

Die Emission negativer Ladungsträger bei Einwirkung von Halogenmolekülen auf Alkalimetalloberflächen.

Von

W. GEIGER.

Mit 11 Figuren im Text.

(Eingegangen am 3. Februar 1955.)

Die chemische Reaktion von Halogenmolekülen thermischer Geschwindigkeit an der Oberfläche einer im Hochvakuum aufgedampften Alkalimetallschicht löst an dieser einen Emissionsstrom negativer elektrischer Ladungsträger aus. Es werden zwei Anordnungen zur Untersuchung des Emissionsstromes beschrieben, mit der ersten wurde die Ausbeute an Ladungsträgern bei chemischen Reaktionen gemessen, mit der zweiten wurde die Natur der emittierten Ladungsträger untersucht.

I. Einleitung.

Die Einwirkung von Halogenmolekülen auf eine Alkalimetalloberfläche führt bei Annäherung der Halogenmoleküle an die Oberfläche zur Dissoziation, zu einem Elektronenübergang vom Metall zum Halogen und damit zur heteropolaren chemischen Bindung des Halogens. Die freiwerdende chemische Bindungsenergie wird im allgemeinen als Wärme in die Umgebung der Reaktionsstelle dissipieren. Die Untersuchung der Reaktion von Halogenmolekülen oder halogenhaltigen Molekülen, wie z. B. Phosgen, an Tropfen flüssiger Alkalimetalllegierung durch HABER und JUST ¹ zeigte jedoch, daß bei einem Teil der Reaktionsprozesse die Energie zur Auslösung eines Emissionsstromes, der von negativen Ladungsträgern getragen ist, aufgewendet werden kann. Eine Bestimmung der spezifischen Ladung durch HABER und JUST ergab, daß unter Einwirkung von Brom und Phosgen an flüssiger Natrium-Kaliumlegierung Elektronen und an der flüssigen Amalgamen des Caesiums, Kaliums und Lithiums negative Ionen ausgelöst werden. Einer eingehenden Untersuchung wurde die Natur der Ladungsträger bisher nicht unterzogen. DENISOFF und RICHARDSON ² untersuchten ihre Energieverteilung mit Hilfe einer Gegenfeldmethode. Von ihnen wurden die Ladungsträger ohne Bestimmung ihrer spezifischen Ladung als Elektronen angenommen. PAPROTH, RAUJE und STRANSKY ³ ließen Jod auf ein Silberblech einwirken und dehnten so die Untersuchung der Emission auf Reaktionen an Festkörperoberflächen aus. Eine Bestimmung der spezifischen Ladung bei ihren Messungen zeigte, daß die emittierten Ladungsträger zum überwiegenden Teil Elektronen sind. Es wird jedoch

angenommen, daß an der Silberoberfläche primär ausschließlich Elektronen ausgelöst werden und negative Ionen nur durch Sekundärprozesse in der während der Messung herrschenden Jodatmosphäre von 0,2 Torr gebildet werden.

RICHARDSON und DENISOFF erklären die von ihnen angenommene Elektronenemission durch folgenden Prozeß: das auftreffende Halogenmolekül bildet an der Oberfläche eine kurzlebige Nichtionenverbindung, die als hochangeregter Zustand des heteropolar gebundenen Alkalihalogenidmoleküls aufgefaßt werden kann. Es besteht nun eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß die beim Übergang in den heteropolaren Bindungszustand freiwerdende Energie in einem Stoßprozeß zweiter Art von einem einzelnen Metallelektron übernommen wird, das nun die Ablösearbeit leisten kann, vorausgesetzt, daß es durch diesen Stoßprozeß eine genügend große Bewegungskomponente senkrecht zur Oberfläche erhalten hat.

Theoretisch wurde schon mehrfach die Möglichkeit einer Emission negativer Ionen bei Einwirkung von Halogenatomen auf eine Alkalimetalloberfläche diskutiert [4], ohne daß bisher ein experimenteller Nachweis eines solchen Emissionsvorganges bekannt ist. Voraussetzung für einen solchen Emissionsvorgang ist, daß die Elektronenaffinität der auftreffenden Gaspartikel die Austrittsarbeit der Metallelektronen übertrifft. Bei Einwirkung von Halogenatomen auf Alkalimetalloberflächen ist dies erfüllt, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht:

Elektronenaffinität (eV)	Austrittsarbeit (eV)
Cl . . . 3,79	Na . . . 2,33
Br . . . 3,60	K . . . 2,26
J . . . 3,19	Rb . . . 2,13
	Cs . . . 1,96

Die Einwirkung von Halogenatomen auf eine Alkalimetalloberfläche ist jedoch bis jetzt der Beobachtung nicht zugänglich. Experimentell läßt sich nur die Einwirkung von Halogenmolekülen untersuchen. Es soll deshalb die Erfüllung der obigen Voraussetzung für Halogenmoleküle geprüft werden. Die Elektronenaffinität der Halogenmoleküle ist nicht gemessen, sie läßt sich nur abschätzen. Nach MULLIKEN [5] gilt für die Elektronenaffinität E_m eines Moleküls

$$E_m = E_a - D_m + D_m^-,$$

wobei E_a die Elektronenaffinität des Atoms, D_m und D_m^- die Dissoziationsarbeiten des Moleküls bzw. negativen Molekülions sind. Die Dissoziationsarbeit D_m^- des Molekülions, die nicht bekannt ist, wird von MULLIKEN zu $\frac{1}{2} D_m$ geschätzt. Damit wird die Elektronenaffinität des Moleküls

$$E_m = E_a - \frac{1}{2} D_m.$$

Mit den aus spektroskopischen Daten bekannten Dissoziationsarbeiten berechnen sich die Elektronenaffinitäten zu:

$$\text{Cl}_2: 3,79 - 1,25 = 2,54 \text{ (eV)}$$

$$\text{Br}_2: 3,60 - 0,98 = 2,62 \text{ (eV)}$$

$$\text{J}_2: 3,19 - 0,77 = 2,42 \text{ (eV)}.$$

Die so abgeschätzten Elektronenaffinitäten der Halogenmoleküle über treffen die Ablöscarbeit der Alkalimetalle ebenfalls und erfüllen damit die obige Voraussetzung, so daß auch eine Emission von negativen Ionen bei Einwirkung von Halogenmolekülen auf eine Alkalimetalloberfläche energetisch möglich ist.

Die Natur der bei diesen chemischen Oberflächenreaktionen emittierten Ladungsträger kann durch die eingangs erwähnten Arbeiten nicht als geklärt gelten. Es war daher Ziel der vorliegenden Untersuchung, die Ausbeute zu bestimmen und Ionen- und Elektronenanteil der Emission zu trennen. Die Messungen wurden im Gegensatz zu den früheren Arbeiten an aufgedampften Schichten reiner Alkalimetalle durchgeführt.

II. Messung der Ausbeute.

a) Versuchsanordnung zur Messung der Ausbeute.

Das Verhältnis der Anzahl emittierter Elementarladungen zur Anzahl der durch chemische Reaktion verbrauchten Halogenmoleküle wird als Ausbeute bezeichnet.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 wiedergegeben. Zur Messung ist die Apparatur von der Pumpe abgeschmolzen. Das Halogengas wird durch eine enge Kapillare in eine hochevakuierte Meßzelle eingelassen und reagiert dort an einer aufgedampften Alkalimetallschicht. Die Meßzelle ist ein zylindrisches Glasgefäß von 10 cm Länge und 3 cm Durchmesser. Die auf ihre Wand aufgedampfte Alkalimetallschicht ist unter Einwirkung des Halogengases emittierende Kathode. Anode ist ein in der Achse der Zelle ausgespannter 0,5 mm starker Platindraht. Eine Platindrahteinschmelzung in der Wand der Meßzelle ermöglicht es, zwischen Anode und Kathode eine Zugspannung anzulegen. Erdungsringe aus Einschmelzmetall unterbrechen die Glaswand jedes der beiden seitlichen Ansätze der Meßzelle, um einen Kriechstrom zwischen Anodendraht und Alkalischiht zu verhindern. Nach dem Bedampfen der Meßzelle wurden die seitlichen Ansätze zur Verbesserung der Isolation außen mit Ceresinwachs überzogen. An die Meßzelle ist ein Quarzfadenmanometer angeschlossen, um den Druckverlauf während der Reaktion des Halogengases verfolgen zu können. Das Quarzfadenmanometer, das von SCHEUBLE [6] ausführlich beschrieben worden ist, enthält wegen der

hohen Anforderungen, die bei diesen Messungen an die Hochvakuumtechnik gestellt werden, nur Platinteile und einen plattinierten Quarzfaden. Das Halogengas ist vor Beginn der Messung in einen Gasbehälter eingeschlossen. Zum Öffnen der Zertrümmerungsfeder des Gasbehälters dient eine mit Glas umschmolzene Eisenkugel, die von außen mit einem Magneten bewegt werden kann.

Über die Mündung der Kapillare ist während des Aufdampfens der Alkalischiht ein Hut aus Glas gezogen, um ein Verstopfen der Kapillare durch Kondensation von Alkalimetall in ihrer Mündung zu verhindern. Der Hut, der mit einem Platinhaken an der Kapillare aufgehängt ist, wird kurz vor Beginn der Messung abgeworfen. Unterhalb der Meßzelle befindet sich eine in Fig. 1 nicht eingezeichnete Destillationsvorrichtung, die zur Darstellung und Reinigung des Alkalimetalls dient.

Zum Evakuieren und Bedampfen ist die Meßzelle über eine Quecksilberfalle, die mit flüssigem Sauerstoff gekühlt wurde, an eine Quecksilberdiffusionspumpe und an ein McLEODSches Manometer angeschlossen. Die Apparatur wurde vor dem Bedampfen mit Alkalimetall mehrere Stunden bei 300°C unter Hochvakuum ausgeheizt, wobei das Alkalimetall sich außerhalb des Ofens befand. Die Abschmelzstellen der Meßzelle zur Destillationsvorrichtung und zur Pumpe wurden vor dem Aufdampfen der Schicht mit einer LENARD-Flamme mehrmals bis zur beginnenden Erweichung des Glases erhitzt, um eine Gasabgabe beim Abschmelzen zu vermeiden. Nach dem Aufdampfen der Alkalischiht wurde die Destillationsvorrichtung von der Apparatur und danach die Apparatur von der Pumpe abgeschmolzen.

Die Meßzelle entspricht einer Photozelle mit innenzentrierter Anode und benötigt daher zur Erreichung des Sättigungsstromes eine hohe Zugspannung. Die Alkalischiht liegt bei den Messungen auf einem Potential von -200 V gegen den Anodendraht weit im Sättigungsbereich. Die Emissionsströme wurden mit einem LUTZ-EDELMANN-Elektrometer nach der Auflademethode gemessen.

Während der Messung ist die Meßzelle in einen lichtdichten Kasten eingeschlossen, um die Auslösung eines Photostromes an der Alkalischiht zu vermeiden. Das Quarzfadenmanometer befindet sich außerhalb dieses Kastens.

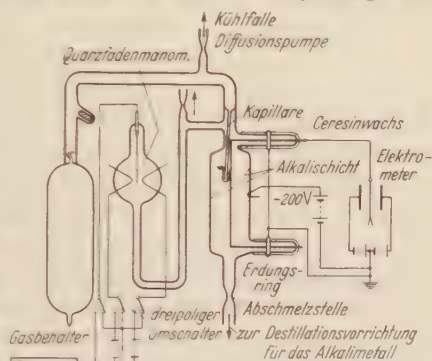


Fig. 1. Versuchsanordnung zur Bestimmung der Ausbeute.

b) Messung des Gasstromes.

Da es zur Bestimmung der Ausbeute erforderlich ist, die Menge des an der Schicht reagierenden Halogengases zu kennen, mußte die durch die Kapillare in die Meßzelle einströmende Gasmenge gemessen werden.

Das Verhältnis der Anzahl einströmender Gasmoleküle zur Zeit soll als Gasstrom bezeichnet werden. Der Gasstrom durch die Kapillare wurde vor und nach jedem Emissionsversuch gemessen. Zu seiner Messung diente eine der Fig. 1 ähnliche Anordnung. Die Meßzelle mit der Alkalischiicht ist durch einen Glaskolben ersetzt. In dem bekannten Volumen des Kolbens und des Quarzladeumanometers wird während des Einströmens des Halogengases der Druckanstieg in Abhängigkeit von der Zeit verfolgt. Aus Einstromzeit, Druckanstieg und Volumen konnte die Größe des Gasstromes berechnet werden. Zu jeder Meßreihe (bestehend aus einer Messung des Emissionsstromes und zwei Messungen des Gasstromes) wurden Gasbehälter mit möglichst gleichem Volumen verwandt, die gleichzeitig und mit gleichem Druck gefüllt worden waren. Kleine Unterschiede in den Volumina der Gasbehälter und im Volumen des Raumes zwischen der Zertrümmerungsfeder des Gasbehälters und der Kapillare konnten innerhalb jeder Meßreihe durch eine einfache Korrektur mit Hilfe des idealen Gasgesetzes berücksichtigt werden. Volumen und Fülldruck der Gasbehälter waren so gewählt, daß der Gasdruck auf der Seite des Gasbehälters und damit auch der Gasstrom nur nach Verlauf von mehr als je 3 Std um 1% durch Ausströmen des Gases durch die Kapillare abnehmen. Die Abnahme des Gasstromes mußte also nur bei lange andauernder Beobachtung des Emissionsstromes berücksichtigt werden.

c) Darstellung der Alkalimetalle und das Aufdampfen der Schichten.

Auf die Reinheit der Alkalimetalle mußte, um reproduzierbare Werte der Ausbeute an Ladungsträgern zu erhalten, besondere Sorgfalt gelegt werden. Sie wurden in der Destillationsvorrichtung im Vakuum dargestellt. Zur Reinigung und vollständigen Befreiung von Gasresten wurde das Alkalimetall nach seiner Darstellung mehrmals destilliert, bis das McLeod'sche Manometer Klebovakuum anzeigte, dann erst wurde die Wand der Meßzelle bedampft. Zum Destillieren und Aufdampfen diente ein elektrischer Ofen mit regelbarer Temperatureinstellung.

Caesium, Rubidium und Kalium wurden aus ihren Dichromaten mit Zirkon nach einer von M. Berk angegebenen Methode reduziert. Natrium wurde durch thermische Zersetzung seines Azids dargestellt.

Eine bei Zimmertemperatur auf eine Glasoberfläche aufgedampfte Alkalischiicht besitzt im Gegensatz zu einer bei der Temperatur der flüssigen Luft aufgedampften keinen elektrisch leitenden Zusammenhang. Bei

Zimmertemperatur ist das Metall, wie Wood [7] beobachtet hat, in winzigen Tröpfchen auf der Unterlage verteilt, wodurch ein sehr hoher Widerstand der Schicht verursacht wird. Die Wand der Meßzelle war deshalb mit einer Goldschicht von 150 Å Dicke bedampft, um den für die Messung des Emissionsstromes notwendigen leitfähigen Zusammenhang der Alkalischiht herzustellen.

Durch die zylindrische Form der Meßzelle war es nicht möglich, eine Schicht aufzudampfen, die eine über die ganze Länge der Meßzelle homogene Dicke besaß. Die Menge des insgesamt aufgedampften Alkalimetalls entsprach einer Schichtdicke von 100 bis 1000 ebenen Atomlagen. Zum Aufdampfen der Alkalischiht wurde $1\frac{1}{2}$ bis 1 Std benötigt.

d) Meßergebnisse mit Chlor.

Bei den ersten Versuchen wurde eine bekannte Chlormenge, die durch ein weites Rohr in die Meßzelle einströmte, an der Schicht zur Reaktion gebracht. Eine Kapillare war noch nicht in die Apparatur (Fig. 1) eingebaut. Die Chlormenge löste einen impulsartigen Ladungsstoß aus. Bei diesen Messungen war die Ausbeute nicht reproduzierbar. Erst durch den Einbau der Kapillare, und die damit erzielte Möglichkeit, stets eine bekannte sehr geringe Chlormenge zur Reaktion zu bringen, konnten reproduzierbare Meßergebnisse erhalten werden.

In Fig. 2 ist der Emissionsstrom je einer mit Caesium, mit Rubidium, mit Kalium und mit Natrium bedampften Meßzelle unter der Einwirkung von möglichst gleichen Chlorströmen wiedergegeben. Der Emissionsstrom der Caesium- und Rubidiumzelle steigt in Abhängigkeit von der Zeit von einem Anfangswert auf einen konstanten Endwert an, der 5 Std nach Beginn der Messung erreicht wird. Die dem konstanten Endwert entsprechende Ausbeute konnte an der Caesiumzelle 70 Std lang und an der Rubidiumzelle 50 Std lang beobachtet werden. Zur Auslösung eines so lange andauernden Emissionsstromes mußte eine ausreichende Menge Alkalimetall in der Meßzelle aufgedampft sein. Der Emissionsstrom erlischt erst dann, wenn das Alkalimetall in der Zelle verbraucht ist. Umpolung der an der Zelle angelegten Zugspannung bringt den Emissionsstrom zum Verschwinden; er kann also nur von negativen Ladungsträgern getragen sein. Ein Ansteigen des Druckes in der Meßzelle konnte während der ganzen Versuchsdauer am Quarzfadenmanometer nicht beobachtet werden. Das durch die Kapillare einströmende Gas wird also an der Schicht stets momentan verbraucht, so daß aus Gasstrom und Emissionsstrom die Ausbeute berechnet werden kann. Die Ausbeuten der vier in Fig. 2 wiedergegebenen Messungen sind in Tabelle 1 zusammengefaßt. Die Berechnung wurde unter Annahme des jeweils erreichten Höchstwertes des Emissionsstromes durchgeführt.

Das lange Andauern des Emissionsstromes ist nur durch einen raschen Diffusionsprozeß des Alkalimetalls an die Schichtoberfläche zu deuten, der immer für genügend Metallatome in der Oberfläche sorgt. Wenn man in der 65 cm² großen Oberfläche der Meßzelle eine ebene Anordnung

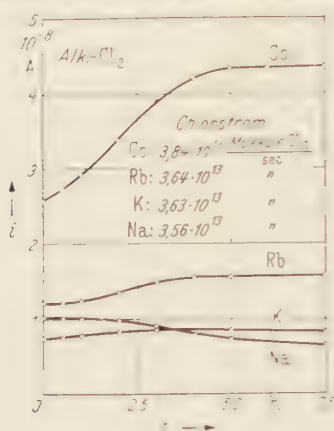


Fig. 2. Alkalimetall—Chlor. Emissionsstrom in Abhängigkeit von der Zeit.

der Alkalimetallatome annimmt, so reicht der Chlorstrom der in Fig. 2 wiedergegebenen Caesiummessung aus, in 4,5 min eine monatomare Schicht des Metalls in Caesiumchlorid umzusetzen. Die entsprechende

Tabelle 1. Ausbeuten Alkalimetall—Chlor. (Berechnet nach den Messungen der Fig. 2.)

Metall	Elementarladung Anzahl von Molekülen Cl ₂
Cs	$7.45 \cdot 10^{-8}$
Rb	$2.53 \cdot 10^{-8}$
K	$1.48 \cdot 10^{-8}$
Na	$1.89 \cdot 10^{-8}$

Zeit für die Rubidiumzelle beträgt 6 min, für die Kaliumzelle 7 min und für die Natriumzelle 9 min.

Die Abhängigkeit des Emissionsstromes von der Größe des Gasstromes wurde an 5 Caesiumzellen mit Chlorgas untersucht. In Tabelle 2

Tabelle 2. Caesium—Chlor. Emissionsstrom und Ausbeute in Abhängigkeit vom Chlorstrom.

Gasstrom Anzahl von Molekülen Cl ₂ Zeit	Emissionsstrom Amp	Ausbeute Elementarladung Anzahl von Molekülen Cl ₂
$8.33 \cdot 10^{13}$ sec	$1.08 \cdot 10^{-7}$	$8.55 \cdot 10^{-8}$
$3.84 \cdot 10^{13}$ sec	$4.38 \cdot 10^{-8}$	$8.55 \cdot 10^{-8}$
$3.46 \cdot 10^{13}$ sec	$5.60 \cdot 10^{-8}$	$10.1 \cdot 10^{-8}$
$2.57 \cdot 10^{13}$ sec	$3.80 \cdot 10^{-8}$	$9.10 \cdot 10^{-8}$
$4.23 \cdot 10^{12}$ sec	$5.85 \cdot 10^{-9}$	$8.70 \cdot 10^{-8}$

sind die Ergebnisse zusammengefaßt: der Gasstrom (1. Spalte der Tabelle) wurde bei den verschiedenen Meßzellen bis zu einem Faktor 20 geändert. Der Emissionsstrom (2. Spalte der Tabelle) ist dem Gasstrom proportional. Die Ausbeute (3. Spalte der Tabelle) ist vom Gasstrom unabhängig.

c) Untersuchung der Ausbeute mit Lithium.

Lithium aufzudampfen war in der unter II a beschriebenen Apparatur nicht möglich, da dies beim Erhitzen das Glas der Destillations-

vorrichtung angriff. Es mußte die Berührung des geschmolzenen heißen Lithiummetalls mit Glas vermieden werden.

Die zur Untersuchung mit Lithium geänderte Apparatur zeigt Fig. 3. Das Lithium wurde aus einem kleinen Schiff aus 0,05 mm starkem Stahlblech, das durch Elektronenbeschuß aufgeheizt werden konnte, auf die Wand der Meßzelle aufgedampft. Zuvor war die gesamte Apparatur etwa 2 Std bei 250° C unter Hochvakuum ausgeheizt worden. Bei dieser Temperatur ist der Dampfdruck des Lithiums noch so gering, daß der Metallampf das Glas der Meßzelle nicht merklich angreift. Eine Reinigung des Lithiums vor dem Aufdampfen, wie bei den übrigen Alkalimetallen, war nicht möglich. Als Unterlage für die Lithiumschicht war eine 150 Å dicke Goldschicht in der Meßzelle aufgedampft.

Den Emissionsstrom einer Lithiumschicht unter Einwirkung eines Chlorstromes von $1,15 \cdot 10^{12}$ Molekülen Cl_2 gibt Fig. 4 wieder. Er

fällt in Abhängigkeit von der Zeit steiler ab als der Emissionsstrom einer Natriumschicht, zumal der Chlorstrom hier um mehr als eine Größenordnung kleiner ist als bei der in Fig. 2 wiedergegebenen Messung mit Natrium. Die Diffusion des Lithiums an die Oberfläche verläuft also wesentlich langsamer als bei den anderen Alkalimetallen.

Die Ausbeute war zu Beginn der Messung

$$0,5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{Elementarladung}}{\text{Anzahl von Molekülen } \text{Cl}_2} \right).$$

III. Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Ausbeute.

Die Schicht einer bei Zimmertemperatur bedampften Kaliumzelle wurde in einem Kältebad von fester Kohlensäure und Azeton auf eine Temperatur von $-78,5^\circ \text{C}$ gekühlt, um ihre Emission zu messen. Die Leitung vom Anodendraht der Meßzelle zum Elektrometerfaden wurde in einem Glasrohr isoliert von der Kältemischung geführt.

Unter Annahme einer ebenen Anordnung der Kaliumatome befinden sich in der 65 cm^2 großen Oberfläche $2,8 \cdot 10^{16}$ Kaliumatome¹. Der

¹ In 1 cm^2 einer ebenen [100]-Fläche ([110]-Fläche) befinden sich $3,51 \cdot 10^{14}$ Kaliumatome ($4,96 \cdot 10^{14}$ Kaliumatome). Eine mittlere Verteilung beider Flächenarten ergibt in einer 65 cm^2 großen ebenen Oberflächenschicht $\frac{1}{2} \cdot 65 \cdot (3,51 + 4,96) \cdot 10^{14} = 2,8 \cdot 10^{16}$ Atome Kalium.

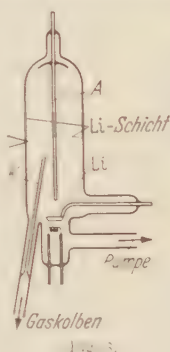


Fig. 3. Apparatur zur Bestimmung der Ausbeute an Lithium.

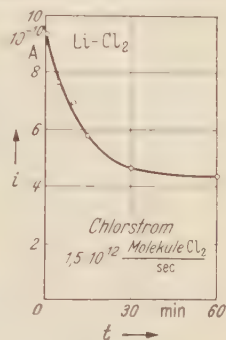


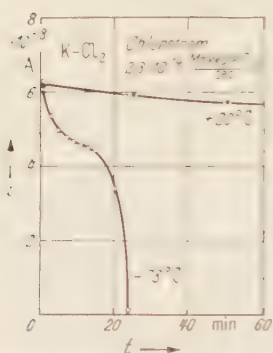
Fig. 4.

Fig. 4. Lithium-Chlor. Emissionsstrom in Abhängigkeit von der Zeit.

Chlorstrom betrug $2,3 \cdot 10^{14}$ Moleküle Cl_2 , reichte also aus, in 1 min die in der ebenen Oberfläche befindlichen Kaliumatome in Kaliumchlorid umzusetzen.

Der Emissionsstrom (mit o bezeichnete Kurve der Fig. 5) sinkt in Abhängigkeit von der Zeit steil ab, 25 min nach Beginn der Messung unter 10/100 seines Anfangswertes.

Die Diffusionsgeschwindigkeit des Alkalimetalls an die Oberfläche ist also soweit erniedrigt, daß eine Absättigung der Oberfläche mit Chlorid eintritt. Die in den 25 min an der Schicht verbrauchte Chlor-



1 $\cdot 10^{11}$ A
strom bei $-78,5^\circ\text{C}$ und bei
Zimmertemperatur.

menge würde ausreichen, in der Meßzelle eine 25 Atomlagen dicke ebene Kaliumschicht in Kaliumchlorid umzusetzen. Die Dicke der umgesetzten Kaliumschicht, bei der die Emission verschwindet, muß aber wesentlich geringer sein, da durch das molekulare Oberflächengebirge die wahre Oberfläche der Schicht größer ist als die angenommene ebene.

Der Chlorstrom wurde 30 min nach Beginn der Messung durch Ausfrieren des Chlors mit flüssigem Sauerstoff im Gasbehälter unterbrochen¹ und die Kaliumschicht auf Zimmertemperatur erwärmt. Die Erwärmung der Schicht setzt den Diffusionsprozeß des Alkalimetalls an die Oberfläche in Gang. Nachdem die Schicht 30 min bei Zimmertemperatur gestanden hatte, wurde nochmals Chlor, nun bei Zimmertemperatur, in die Meßzelle eingeschlossen. Den Verlauf des Emissionsstromes gibt die mit x bezeichnete Kurve der Fig. 5 wieder. Die Anfangswerte des Emissionsstromes bei einer Temperatur von $-78,5^\circ\text{C}$ und von 20°C sind gleich groß. Die Ausbeute ist also an der realen Oberfläche von ihrer Temperatur unabhängig.

IV. Die spezifische Ladung der emittierten Ladungsträger.

a) Versuchsanordnung zur Ermittlung der spezifischen Ladung.

Die Natur der Ladungsträger wurde durch Untersuchung ihrer Bewegung in einem gekreuzten magnetischen und elektrischen Feld ermittelt. Die Anordnung zeigt Fig. 6. Die Meßzelle ist einem Dewar-gefäß ähnlich. In ihrem Inneren kann mit der inneren und äußeren Wand Alkalimetall aufgedampft werden. Vom oberen Rand der Meßzelle wird

¹ Der Chlorstrom im Gasgefäß beträgt 1 Torr. Bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffes ist der Dampfdruck von Chlor kleiner als 10^{-6} Torr, der Chlorstrom also vollständig unterbrochen.

das Alkalimetall durch Erwärmen vertrieben, um gute Isolation zwischen innerer und äußerer Alkalischiicht herzustellen. Auf die Wände der Meßzelle sind halbleitende durchsichtige Zinnoxyschichten nach einem von GOMER ⁸ angegebenen Verfahren aufgedampft, um den leitenden Zusammenhang der bei Zimmertemperatur aufgedampften Alkalimetalle herzustellen. Die Zinnoxyschichten reichen oben bis 3 cm unterhalb des Randes der Meßzelle und unten so weit wie das innere Rohr. [Zinnoxyschichten wurden gewählt, weil sie bei dieser Form der Meßzelle sich einfacher aufdampfen lassen als Goldschichten. Sie sind chemisch sehr widerstandsfähig, so daß die Zellen teilweise mehrmals mit Alkalimetall bedampft werden konnten. Bei genügend dick aufgedampfter Alkalischiicht wird unter Verwendung dieser leitfähigen Unterlage die gleiche Ausbeute erreicht wie unter Verwendung einer Goldunterlage. Dies zeigt ein Vergleich der in II d. beschriebenen Ergebnisse mit den folgenden. Das Halogen gas konnte wieder durch eine enge Kapillare zugelassen werden, deren Mündung sich zwischen den beiden Alkalischiichten befindet. Es reagiert teils an der inneren teils an der äußeren Schicht.

Die Alkalischiichten bilden einen Kondensator. Durch Anlegen einer Zugspannung zwischen den beiden Schichten (bei den folgenden Messungen immer ≈ 20 V) wird ein zylindersymmetrisches elektrisches und von einer großen Luftpule ein homogenes magnetisches Feld erzeugt, dessen Feldlinien senkrecht auf den elektrischen stehen. Durch Umkehren der Richtung des elektrischen Feldes kann die Emission der inneren oder der äußeren Schicht untersucht werden. Die Anordnung entspricht dem HULLSchen Magnetron. Die Ladungsträger bewegen sich unter Wirkung des elektrischen und magnetischen Feldes in erster Näherung auf Zykloidenbahnen mit einem Kreis (Äquipotentiallinie) als Leitlinie. Die Theorie des Magnetrons ⁹ gibt für die Zugspannung U und die kritische magnetische Induktion B_{kr} , bei der die Ladungsträger die Anode gerade nicht mehr erreichen können, folgenden Zusammenhang:

$$U = B_{kr}^2 \frac{e}{8m} r_a^2 \left(1 - \frac{r_k^2}{r_a^2} \right)^2$$

e/m = spezifische Ladung; r_a = Anodenradius; r_k = Kathodenradius.

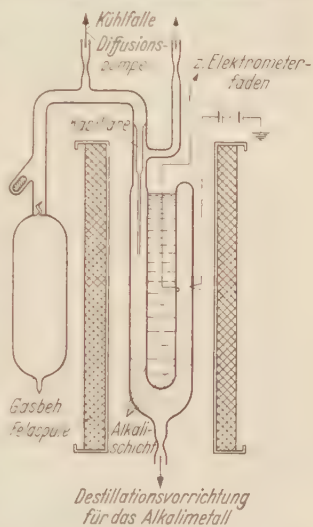


Fig. 6. Anordnung zur Bestimmung der spezifischen Ladung. Das innere Rohr kann gekühlt werden, um die Schicht bei tiefer Temperatur zu untersuchen.

Die Gleichung ist unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Ladungsträger die Kathode mit der Geschwindigkeit Null verlassen.

Während der folgenden Messungen wird die Zugspannung U konstant gehalten. Der Emissionsstrom wird in Abhängigkeit von der Stärke des Magnetfeldes untersucht.

Unter den hier vorliegenden Bedingungen (Radius des äußeren Rohres 2,5 cm, des inneren Rohres 1,25 cm, Luftspule mit $120 \frac{\text{Amp}}{\text{cm}}$, Zugspannung $\pm 20 \text{ V}$) wird B_{kr} für Elektronen, die an der äußeren Schicht ausgelöst sind, bei 50 mA Magnetstrom erreicht, für solche, die an der inneren Schicht ausgelöst sind, bei 100 mA Magnetstrom. Für Ionen ist der Magnetstrom zur Erreichung des kritischen Magnetfeldes etwa zwei Größenordnungen höher.

b) Messung der spezifischen Ladung.

Vor dem Einlassen von Halogengas in die Meßzelle wurde das Verhalten eines an der Alkalisicht ausgelösten Photostromes bei konstanter Zugspannung in Abhängigkeit von der Stärke des Magnetfeldes untersucht. Die Abnahme eines solchen Photostromes ist in Fig. 7 wieder gegeben. Der Photostrom

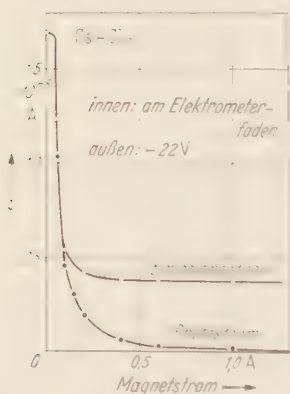


Fig. 7. Caesium-Chlor. Abnahme des Emissionsstromes und eines Photostromes im Magnetfeld.

Tabelle 3. Verhalten des Emissionsstromes der in Fig. 7 dargestellten Messung bei größerem Magnetstrom.

Magnetstrom Amp	Emissionsstrom Amp	Ionenanteil %
0	$1,60 \cdot 10^{-8}$	—
1	$3,76 \cdot 10^{-9}$	23,5
2	$3,04 \cdot 10^{-9}$	22,8
3	$3,57 \cdot 10^{-9}$	22,3
4	$3,57 \cdot 10^{-9}$	22,3
6	$3,53 \cdot 10^{-9}$	22,0

ist an einer Caesiumkathode auf dem äußeren Rohr ausgelöst. (Er ist in Fig. 7 für seinen Wert ohne Magnetfeld auf die Größe des durch Chlor ausgelösten Stromes reduziert.) Die Abnahme des Photostromes setzt bei der für Elektronen unter IVa berechneten Stärke des Magnetstromes ein.

Das Verhalten des durch Chlor an dieser Caesiumkathode ausgelösten Stromes im Magnetfeld zeigt die mit \circ bezeichnete Kurve der Fig. 7. Ein Teil der Ladungsträger verhält sich wie Elektronen, der Rest kann durch das Magnetfeld auch bei Stromstärken bis 6 Amp in der Luftspule nicht beeinflusst werden, wie Tabelle 3 zeigt. Dieser Rest

von 22–24% des gesamten Emissionsstromes muß von schweren Ladungsträgern also von negativen Ionen getragen sein. Den Verlauf der Emission für die innere und die äußere Schicht dieser Caesiumzelle in Abhängigkeit von der Zeit zeigt Fig. 8a und 8b, und zwar die Gesamtemissionsströme, gemessen ohne Magnetstrom (mit \circ bezeichnete Kurven), und die Ionenströme, gemessen mit einem Magnetstrom von 3 Amp (mit \bullet bezeichnete Kurven). Der Chlorstrom betrug $4,47 \cdot 10^{13}$ Moleküle Cl_2 sec. Aus der Summe der konstanten Endwerte der Emissionsströme beider Schichten ergibt sich in befriedigender Übereinstimmung mit den unter II d erhaltenen Ergebnissen eine Ausbeute von $11,1 \cdot 10^{-3}$ Elementarladung Anzahl von Molekülen Cl_2 , Elektronen und $8,70 \cdot 10^{-3}$ Ionen Molekül Cl_2 und $2,44 \times 10^{-3}$ Ionen Molekül Cl_2 .

Das Verhältnis der Größe des Emissionsstromes von innerer zu äußerer Schicht ist von der Stellung der Kapillarmündung zwischen den beiden Schichten abhängig. Das Chlor reagiert bevorzugt in unmittelbarer Umgebung der Kapillarmündung mit der Schicht, wahrscheinlich nach nur wenigen Wandstößen, denn sichtbar wird die Alkalischicht nach genügend langem Einströmen des Chlors nur in der Nähe der Kapillarmündung angegriffen. Die an der Reaktion wesentlich beteiligte Zone der Alkalischicht und damit die Quelle der Ladungsträger kann so durch eine geeignete Stellung der Kapillare in die Mitte der bedampften Fläche gelegt werden. Die Bewegung der Ladungsträger im magnetischen und elektrischen Feld unterliegt nur sehr geringen Randstörungen, da die ungestörte Feldverteilung weit über die wesentliche Reaktionszone hinausreicht.

Die emittierten negativen Ionen bilden sich bei der Wechselwirkung der Chlormoleküle mit Alkalimetall in einem Elementarprozeß unmittelbar an der Schichtoberfläche. Eine Anlagerung von Elektronen an das aus der Kapillare ausströmende Chlorgas im Räume zwischen den beiden Schichten kann aus folgenden Gründen ausgeschlossen werden:

1. Die Wirkungsquerschnitte für Anlagerung von Elektronen an Halogenmoleküle sind kleiner als die gaskinetischen Querschnitte, wie aus Messungen von BRADBURY¹⁰ hervorgeht. Die rasche Reaktion des Chlors am Metall, wahrscheinlich nach nur wenigen Wandstößen,

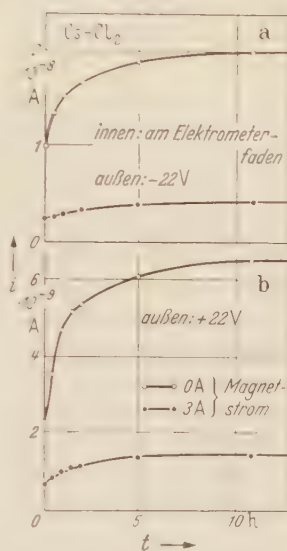


Fig. 8. Caesium-Chlor-Emissionströme der äußeren (oben) und der inneren Schicht (unten).

bedingt eine sehr geringe Chlorkonzentration im Gasraum und damit große freie Weglängen der Elektronen.

2. Eine Erhöhung des Chlorstromes bewirkt eine proportionale Erhöhung des Emissionsstromes und der Dichte des Chlors im Gasraum. Bei Bildung negativer Ionen durch Elektronenanlagerung im Gasraum wäre ein Anwachsen des Ionenstromes proportional dem Produkt aus Chlorstrom und Emissionsstrom zu erwarten. Die drei in Tabelle 5 aufgeführten Messungen an Kaliumzellen zeigen jedoch, daß der Ionenstrom nur proportional dem Chlorstrom zunimmt, der Ionenanteil also unabhängig von der Größe des Chlorstromes ist.

3. Die Bildung negativer Ionen durch Elektronenanlagerung an Chlormoleküle im Gasraum würde bei Erhöhung des Elektronenstromes eine Erhöhung des Ionenstromes verursachen. Der Elektronenanteil des Emissionsstromes läßt sich durch einen gleichzeitig an der Schicht ausgelösten Photostrom erhöhen. Das Ergebnis eines solchen Versuches ist in Tabelle 4 zusammengefaßt. Die 2. Spalte der Tabelle gibt das Verhalten eines Photostromes vor dem Einfließen von Chlor in Abhängigkeit vom Magnetfeld wieder. Die 3. Spalte zeigt das vom Magnetfeld nicht beeinflussbare Rest des Photostromes in Formellen des Stromes ohne Magnetfeld. Das Verhalten des durch Chlor ausgelösten Stromes wurde bereits oben beschrieben (Fig. 7 und Tabelle 3). Die 4. Spalte der Tabelle 4 gibt das Verhalten des durch Chlor und Licht gleichzeitig ausgelösten Stromes im Magnetfeld wieder. Der durch Chlor und Licht ausgelöste Strom und der durch Chlor allein ausgelöste Strom (Tabelle 3) sind unmittelbar nacheinander an der gleichen Schicht gemessen und können daher direkt verglichen werden. Der Erhöhung des Elektronenanteils des Emissionsstromes durch den gleichzeitig ausgelösten Photostrom auf das Zehnfache bewirkt eine Erhöhung des durch das Magnetfeld nicht beeinflussbaren Stromes um $\approx 10\%$, wie ein Vergleich der 4. Spalte von Tabelle 4 mit Tabelle 3 zeigt. Diese geringe Erhöhung wird durch

Tabelle 4. Cäsium—Chlor. Verhalten eines Photostromes und eines durch Chlor und Photoeffekt gleichzeitig ausgelösten Stromes im Magnetfeld. (Zugspannung wie in Fig. 7.)

Magnetstrom	Photostrom vor der Messung		Photostrom + Chlorstrom	
	nicht beeinflussbarer Anteil			
Amp	Amp	$\frac{I_{\text{rest}}}{I_{\text{photo}}}$	Amp	Amp
0	$2,16 \cdot 10^{-7}$	—	$2,76 \cdot 10^{-7}$	$2,60 \cdot 10^{-7}$
1	$2,21 \cdot 10^{-9}$	9,7	$5,63 \cdot 10^{-9}$	$1,87 \cdot 10^{-9}$
2	$0,80 \cdot 10^{-9}$	3,7	$4,34 \cdot 10^{-9}$	$0,70 \cdot 10^{-9}$
3	$0,51 \cdot 10^{-9}$	2,35	$4,05 \cdot 10^{-9}$	$0,48 \cdot 10^{-9}$
4	$0,38 \cdot 10^{-9}$	1,70	$3,97 \cdot 10^{-9}$	$0,40 \cdot 10^{-9}$
6	$0,34 \cdot 10^{-9}$	1,55	$3,88 \cdot 10^{-9}$	$0,35 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 5. Alkalimetall—Chlor. Ionenanteil in Prozenten des Gesamtemissionsstromes.

Metall	Chlorstrom	Emissionsstrom Amp	Ionenanteil %	Ausbeute
	Anzahl von Molekülen Cl ₂ Zeit			Elementarladung Anzahl von Molekülen Cl ₂
Cs	$1,47 \cdot 10^{13}/\text{sec}$	$2,61 \cdot 10^{-8}$	22	$11,1 \cdot 10^{-3}$
Cs	$3,28 \cdot 10^{13}/\text{sec}$	$5,58 \cdot 10^{-8}$	24	$10,5 \cdot 10^{-3}$
Rb	$1,67 \cdot 10^{14}/\text{sec}$	$6,50 \cdot 10^{-8}$	19	$2,44 \cdot 10^{-3}$
Na	$5,00 \cdot 10^{12}/\text{sec}$	$1,70 \cdot 10^{-9}$	4	$2,12 \cdot 10^{-3}$
K	$7,85 \cdot 10^{13}/\text{sec}$	$2,09 \cdot 10^{-8}$	5,5	$1,60 \cdot 10^{-3}$
K	$1,96 \cdot 10^{13}/\text{sec}$	$4,57 \cdot 10^{-9}$	6,5	$1,46 \cdot 10^{-3}$
K	—	$1,08 \cdot 10^{-10}$	6,5	—

einen vom Magnetfeld nicht beeinflussbaren Rest des Photostromes verursacht, nicht durch Bildung negativer Ionen. Der durch Photoeffekt ausgelöste Anteil des Stromes kann als Differenz aus der 4. Spalte der Tabelle 4 und aus Tabelle 3 errechnet werden und ist in der 5. Spalte der Tabelle 4 wiedergegeben. Sein durch das Magnetfeld nicht beeinflussbarer Rest ist in der 6. Spalte in Promillen des Stromes ohne Magnetfeld angegeben. Ein Vergleich dieser Spalte mit der 2. Spalte der Tabelle 4 zeigt, daß er im gleichen Maße wie der Photostrom vor dem Einlassen von Chlor vom Magnetfeld beeinflusst wird. Der zusätzlich ausgelöste Photostrom bewirkt also keine Anlagerung von Elektronen an das Chlor im Gasraum.

Eine Trennung von negativen Chloratom- und Molekülionen war mit der benutzten Luftspule nicht möglich, da mit ihr kein ausreichendes Magnetfeld erzeugt werden konnte.

Die Ergebnisse von Meßzellen, die mit verschiedenen Alkalimetallen bedampft waren, unter der Einwirkung von Chlor sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Sie gibt die Stromanteile von innerer und äußerer Schicht jeweils addiert an. Der Ionenanteil (in Prozenten des Gesamtemissionsstromes) nimmt, wie die 4. Spalte der Tabelle 5 zeigt, vom Cäsium zum Natrium hin ab. Die Ausbeuten (5. Spalte der Tabelle 5) stimmen mit den unter H₂ erhaltenen überein, wie ein Vergleich mit Tabelle 1 zeigt. Der Vergleich gibt einen Einblick in die Reproduzierbarkeit der Messungen.

Bei Natrium- und Kaliumzellen war der Ionenanteil zu Beginn der Messung oft stark erhöht. In Fig. 9 ist dieses Verhalten am Beispiel einer Natriumzelle wiedergegeben. Der Gesamtemissionsstrom ist ohne

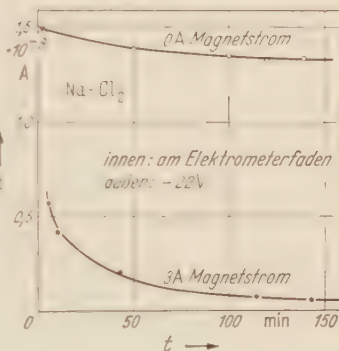


Fig. 9. Natrium—Chlor. Gesamtemissionsstrom und Ionenstrom.

Magnetstrom, der Ionenstrom bei einem Magnetstrom von 3 Amp gemessen. Der Ionenanteil des Emissionsstromes sinkt in Abhängigkeit von der Zeit von einem Anlaufwert von 40% in 150 min auf 5% ab. Dieser Ionenanteil blieb dann über lange Zeit konstant.

c) Untersuchungen bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffes.

Die einem Dewargefäß ähnliche Form der Meßzelle ermöglicht es, die innere Schicht bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffes aufzudampfen und ihre Emission bei dieser Temperatur zu untersuchen. Das innere

Rohr der Meßzelle wurde hierzu mit flüssigem Sauerstoff gefüllt, wie in Fig. 6 angedeutet ist. Das äußere Rohr befand sich stets auf Zimmertemperatur.

Der Emissionsstrom der gekühlten Schicht fällt wie bei der unter III. beschriebenen Messung rasch ab, da eine Absättigung der Oberfläche mit Chlorid eintritt. Der Emissionsstrom der äußeren auf Zimmertemperatur befindlichen Schicht zeigt das bei dieser Temperatur nach IVa zu erwartende Verhalten. Unterbricht man den Chlorstrom, bevor die gekühlte Schicht mit

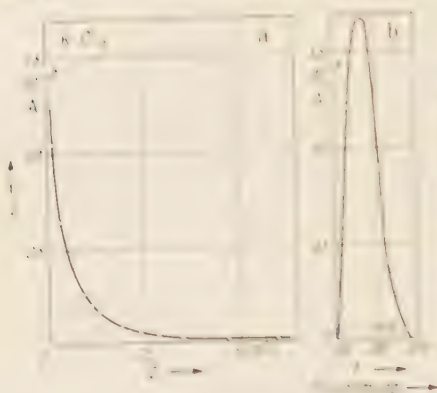


FIG. 10. a. Kalium. Chlor. Abklingen des Emissionsstromes ohne Chlorzufuhr bei tiefer Temperatur. b. und sein Verlauf beim Wiedereerwärmen. b., ebenfalls ohne Chlorzufuhr.

Chlor abgesättigt ist, so setzt die Emission der gekühlten Schicht nicht sofort aus wie bei einer auf Zimmertemperatur befindlichen Schicht, sondern klingt zeitlich ab. Dieses zeitliche Abklingen der Emission einer gekühlten Kaliumschicht nach Unterbrechen des Chlorstromes ist in Fig. 10a wiedergegeben. Der Emissionsstrom war nach 180 min auf $7 \cdot 10^{-12}$ Amp abgeklungen; dann wurde 180 min nach dem Unterbrechen des Chlorstromes der flüssige Sauerstoff aus dem Innern des Rohres entfernt, so daß die Schicht sich auf Zimmertemperatur erwärmt. Hierbei erlangte sie nochmals eine Emissionsfähigkeit ohne Zufuhr von Chlor. Den Verlauf dieses Emissionsstromes gibt Fig. 10b wieder.

Der Emissionsstrom nach Unterbrechen des Chlorstromes wird folgendermaßen gedeutet: Bei tiefer Temperatur geht der Reaktion des Chlors mit Kalium ein VAN DER WAALSScher Bindungszustand voraus. Nach Unterbrechung des Chlorstromes kann ein Teil der an der Schicht gebundenen Chlormolekeln wiederverdampfen (die äußere Schicht zeigt ebenfalls eine geringe Emission), ein Teil der Molekeln, die an geeigneten

Zentren liegen, kann die Aktivierungsenergie für den Übergang in den heteropolaren Bindungszustand bereits bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffes aufbringen. Dies ergibt die zeitlich abklingende Emission. Bei Erwärmung der Schicht kann dann auch Chlor an Zentren höherer Aktivierungsenergie in den heteropolaren Bindungszustand übergehen. Dies ergibt den Emissionsstrom bei Erwärmung.

V. Meßergebnisse mit Brom und Jod.

In der Apparatur zur Bestimmung der spezifischen Ladung (Fig. 6) wurde die Einwirkung von Jod und Brom auf Kalium und Caesium untersucht.

Die an Kaliumzellen erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 6a und die an Caesiumzellen erhaltenen in Tabelle 6b zusammengefaßt. In Tabelle 6a und 6b ist zum Vergleich je eine Messung mit Chlor aufgenommen. Die aufgeführten Emissionsströme sind die Summe der Ströme von innerer und äußerer Alkalischiicht, und zwar die Summe der Anfangswerte an den reinen Alkalimetalloberflächen. Aus den Tabellen geht hervor, daß die Gesamt-*Ausbeute* vom Chlor zum Jod hin abnimmt. Der Ionenanteil am Gesamtstrom nimmt dagegen vom Chlor zum Jod hin zu. Der größte Ionenanteil wurde bei Einwirkung von Jod auf Caesium gemessen. Das

Tabelle 6a. *Kalium-Halogen. Emissionsstrom und Ausbeute.* (Anfangswerte an den reinen Oberflächen.)

Gas	Gasdruck Anzahl von M. & c. Zeit	Gesamt- emissions- strom Amp.	Ionenstrom Amp.	Elektronenstrom Amp.	Ionenanteil %	Ausbeute		
						Gesamt Elementarladung Molekulanzahl	Ionen Elementarladung Molekulanzahl	Elektronen Elementarladung Molekulanzahl
Cl ₂	1,57 · 10 ¹¹ /Sec	4,47 · 10 ⁻⁸	2,80 · 10 ⁻⁹	4,18 · 10 ⁻⁸	6,4	1,70 · 10 ⁻³	0,11 · 10 ⁻³	1,67 · 10 ⁻³
Br ₂	3,34 · 10 ¹¹ /Sec	2,75 · 10 ⁻⁸	2,64 · 10 ⁻⁹	2,55 · 10 ⁻⁸	7,4	0,52 · 10 ⁻³	0,04 · 10 ⁻³	0,48 · 10 ⁻³
J ₂	1,23 · 10 ¹¹ /Sec	7,50 · 10 ⁻¹⁰	8,63 · 10 ⁻¹¹	5,64 · 10 ⁻¹⁰	11,5	0,61 · 10 ⁻³	0,004 · 10 ⁻³	0,03 · 10 ⁻³

Tabelle 6b. *Caesium-Halogen. Emissionsstrom und Ausbeute.* (Anfangswerte an den reinen Oberflächen.)

Gas	Gasdruck Anzahl von M. & c. Zeit	Gesamt- emissions- strom Amp.	Ionenstrom Amp.	Elektronenstrom Amp.	Ionenanteil %	Ausbeute		
						Gesamt Elementarladung Molekulanzahl	Ionen Elementarladung Molekulanzahl	Elektronen Elementarladung Molekulanzahl
Cl ₂	1,47 · 10 ¹¹ /Sec	2,61 · 10 ⁻⁸ **	5,71 · 10 ⁻⁹	2,04 · 10 ⁻⁸	22	11,1 · 10 ⁻³	2,44 · 10 ⁻³	8,70 · 10 ⁻³
Br ₂	5,70 · 10 ¹¹ /Sec	1,22 · 10 ⁻⁸ **	3,10 · 10 ⁻⁹	9,10 · 10 ⁻⁹	25	5,25 · 10 ⁻³	1,32 · 10 ⁻³	3,84 · 10 ⁻³
J ₂	1,23 · 10 ¹¹ /Sec	1,05 · 10 ⁻⁷	2,87 · 10 ⁻⁸	7,60 · 10 ⁻⁸	27	1,10 · 10 ⁻³	0,31 · 10 ⁻³	0,83 · 10 ⁻³
		0,21 · 10 ⁻⁹	2,50 · 10 ⁻⁹	3,62 · 10 ⁻⁹	42	0,31 · 10 ⁻³	0,13 · 10 ⁻³	0,18 · 10 ⁻³

* Konstanter Endwert. ** Anfangswert.

Verhalten eines solchen von Jod an einer Caesiumschicht ausgelösten Stromes in Abhängigkeit vom Magnetfeld bei konstanter Zugspannung ist in Fig. 11 wiedergegeben. Sie zeigt außerdem das Verhalten eines vor dem Einlassen von Jod ausgelösten Photostromes.

Auch unter Einwirkung von Brom und Jod diffundiert das Alkalimetall bei Zimmertemperatur rasch an die Oberfläche, so daß der Emissionsstrom über lange Zeit beobachtet werden konnte.

Messungen an Schichten, die mit flüssigem Sauerstoff schüttelt waren, ergaben eine Temperaturabhängigkeit der Ausbeute an der reinen

Schichtoberfläche. Bei tiefer Temperatur tritt eine rasche Abnahme des Emissionsstromes mit zunehmender Bedeckung der Oberfläche mit Bromid und Jodid ein.

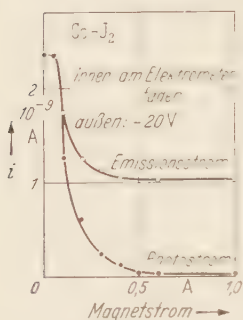


Fig. 11. Caesium—Jod. Abnahme des Emissionsstromes und eines Photostromes im Magnetfeld.

VI. Messungen an Alkalimetall-Sauerstoff und an Nickel-Sauerstoff.

Die Reaktion von Sauerstoff an einer Caesiumschicht in der unter IIa beschriebenen Apparatur löste eine geringe Emission aus, und zwar bei einer einströmenden Gasmenge von $5,5 \cdot 10^{13} \frac{\text{Moleküle O}_2}{\text{sec}}$ einen Emissionsstrom von $4 \cdot 10^{-13}$ Amp. Die Ausbeute ist 5 Größenordnungen kleiner als bei der Reaktion mit Chlor.

An Kalium war unter der Einwirkung von Sauerstoff keine Emission nachweisbar. (Gasstrom $1,1 \cdot 10^{14} \frac{\text{Moleküle O}_2}{\text{sec}}$, Emissionsstrom $< 10^{-14}$ Amp).

Der Sauerstoff reagierte während einer Versuchsdauer von 10 Std stets momentan an den Alkalisichten, ein Druckanstieg in der Meßzelle konnte mit dem Quarzdruckenmanometer nicht festgestellt werden.

Mit Rücksicht auf die Möglichkeit eines Zusammenhanges der Emission negativer Ladungsträger bei chemischen Reaktionen mit der bei Zahlrohruntersuchungen auftretenden Exoelektronenemission¹¹ wurde die Chemisorption von Sauerstoff an im Hochvakuum aufgedampften Nickelschichten untersucht. Dieser Sorptionsvorgang ist durch eine Arbeit von SCHEUBLE [6] eingehend untersucht. Die Untersuchung der Momentansorption von Sauerstoff auf eine mit ihr verbundene Emission ergab, daß durch $5 \cdot 10^9$ Sorptionsprozesse von Sauerstoffmolekülen weniger als eine Elementarladung ausgelöst wird. Es konnte lediglich eine Änderung des Kontaktpotentials durch die Sorption beobachtet werden.

Zusammenfassung.

Die Einwirkung eines konstanten Halogenmolekülstromes auf die Oberfläche einer Alkalischiicht im Hochvakuum führt zur Auslösung eines Stromes, der von Elektronen und von negativen Ionen getragen ist.

Die größte Ausbeute an Ladungsträgern wurde bei der Reaktion von Chlor an Caesium mit etwa 1% gemessen. Die Ausbeute nimmt vom Caesium zum Lithium und vom Chlor zum Jod hin ab. Der relative Ionenanteil am Gesamtstrom nimmt dagegen vom Chlor zum Jod zu.

Die Ausbeute der Reaktion von Sauerstoff an Alkalimetalloberflächen ist mindestens 5 Größenordnungen geringer, als die der Reaktion von Chlor an Alkalimetalloberflächen.

An reinen Alkalimetalloberflächen ist die Ausbeute unabhängig von der Temperatur der Oberfläche.

Bei Zimmertemperatur sorgt ein Diffusionsprozeß ständig für genügend Alkalimetall an der Oberfläche, so daß der Emissionsstrom über lange Zeit beobachtet werden kann. Bei tiefer Temperatur wird dieser Diffusionsprozeß weitgehend eingefroren.

Abschließend danke ich Herrn Professor Dr. GERTHSEN für die Anregung zu diesen Untersuchungen und das Interesse, mit dem er sie begleitete, ebenso der Deutschen Forschungsgemeinschaft für das Assistentenstipendium, welches mir ihre Durchführung ermöglicht hat.

Literatur.

1. HABER, I. u. G. JUST: *Ann. Phys.* **30**, 411 (1909); **36**, 308 (1912). — *Z. Elektrochem.* **16**, 275 (1910). — 2. DENISCH, A. K., and O. W. RICHARDSON: *Proc. Roy. Soc. Lond.* **132**, 22 (1931); **144**, 46 (1934); **145**, 18 (1934); **146**, 524 (1934); **148**, 533 (1935); **150**, 433 (1935). — 3. PATRICH, H. W., RATHJE u. I. N. STRANSKI: *Z. Elektrochem.* **56**, 406 (1952). — 4. MASSEY, H. S. W.: *Negative Ions*. Cambridge 1936. — 5. MULLIKEN, R. S.: *J. Amer. Chem. Soc.* **72**, 600 (1950). — 6. SCHEFFLE, W.: *Z. Physik* **135**, 125 (1953). — 7. WOOD, R. W.: *Phys. Rev.* **44**, 811 (1936). — 8. GIERER, R.: *Rev. Sci. Instrum.* **24**, 993 (1953). — 9. HULL, A. W.: *Phys. Rev.* **18**, 31 (1921). — 10. BRADBURY, N. E.: *J. Chem. Phys.* **2**, 827 (1934). — BAILEY, I. E., R. E. B. MARINSON and I. M. SOMMERVILLE: *Phil. Mag.* **24**, 177 (1937). — HEALEY, R. H.: *Phil. Mag.* **26**, 940 (1938). — 11. HANEL, O., F. G. HOUTERMANS u. K. SEEGER: *Z. Physik* **130**, 109 (1951).

Karlsruhe, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Zur praktischen Lösung der relativistischen Einelektronengleichung.

Von

EGIL A. HYLLERAAS.

(Eingegangen am 22. Februar 1955.)

Es werden die großen und kleinen Komponenten separiert und die Lösung der relativistischen Vierkomponentengleichung des KEPLER-Problems explizite durch zwei LAGUERRE-Funktionen ausgedrückt.

Die Lösungen der relativistischen Wellengleichung eines Elektrons im Felde $V = -Ze^2/r$ eines Atomkerns sind schon längst in allen Einzelheiten bekannt. Die meisten Darstellungen gehen aber von den beiden simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung über radialen Eigenfunktionen aus, welches, so scheint es mir, den einfachen analytischen Charakter dieser Funktionen etwas verdunkelt. Eine sichere Handhabung der relativistischen Eigenfunktionen wird dadurch nicht unerheblich erschwert. Wir wollen hier die Funktionen direkt aus Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschreiben, so daß eine Separation der großen und kleinen Komponenten bewerkstelligt ist.

Um die Rechnungen möglichst kurz zu gestalten, führen wir sofort atomare Einheiten ein und brauchen die Größen $e=1$, $m=1$, $\hbar=1$ nicht mehr zu schreiben. Wie bekannt wird die Längeneinheit dadurch $a_H = \hbar^2/mc^2$ und die Energieeinheit $2Rh = c^2 a_H$. Die dimensionsfreie Feinstrukturkonstante $\alpha = c^2 \hbar c \approx 1/137$ behält natürlich dabei ihren numerischen Wert, woraus folgt, daß die Lichtgeschwindigkeit den Wert erhält $c = 1/\alpha \approx 137$, denn die Einheit der Geschwindigkeit ist $c\alpha = c^2 \hbar = 1$. Weiter ist in der Wellengleichung \mathbf{p} durch $-i\nabla$ und \mathbf{p}^2 durch $-\nabla^2$ zu ersetzen. Die gyromagnetischen Verhältnisse $e/2mc$ und e/mc der Elektronenbewegung und der Eigenrotation sind dementsprechend durch $\frac{1}{2}\alpha$ und α zu ersetzen. Die DIRACschen α -Matrizen schreiben wir immer vektoriell als $\boldsymbol{\alpha}$ für die drei ersten und $\beta = \alpha_4$ für die letzte, wodurch Verwechseln mit der Feinstrukturkonstante α vermieden wird.

Mit

$$V = -Z/r \quad \text{und} \quad \phi_0 = \alpha(E - V) = \alpha(E + Z/r) \quad (1)$$

nehmen wir nun die Wellengleichung in der Form an

$$\phi_0 - \beta c = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}, \quad (2)$$

wobei zu verstehen ist, daß die Operatoren der beiden Seiten auf eine Wellenfunktion ψ wirken, die nicht hingeschrieben ist. Multiplikation

mit $p_0 + \beta c$ führt wegen $\beta \alpha = -\alpha \beta$ zu der Gleichung

$$p_0^2 - c^2 = \alpha \mathbf{p} (p_0 - \beta c) + \alpha [p_0, \mathbf{p}]$$

oder beim Wiedereinsetzen von (2) und Ausrechnung des Kommutators,

$$p_0^2 - c^2 - \mathbf{p}^2 = -i \alpha Z (\alpha \mathbf{r}) / r^3. \quad (3)$$

Sodann multiplizieren wir nochmals mit $p_0 + \beta c$ und erhalten

$$[p_0 + \beta c] [p_0^2 - c^2 - \mathbf{p}^2] = \frac{\alpha Z}{r^3} [-i \mathbf{r} \mathbf{p} + \sigma \mathbf{m}] \quad (4)$$

mit $i\sigma_z = \alpha_x \alpha_y$ usw. und $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Die rechte Seite wird erhalten dadurch, daß man $p_0 - \beta c$ durch α hindurchführt und als $p_0 - \beta c$ nach (2) wieder hineinsetzt.

In (4) sind die großen und kleinen Komponenten schon separiert, denn es kommen nur die Operatoren vor, β , der diagonal ist, und σ der nur ψ_1 mit ψ_2 und ψ_3 mit ψ_4 verbindet. Es sei weiter bemerkt, daß bei der Form (2) der Wellengleichung ψ_1, ψ_2 die großen und ψ_3, ψ_4 die kleinen Komponenten der Wellenfunktion darstellen.

Wie bekannt kommutiert die vektorielle Größe $\mathbf{m} + \frac{1}{2} \sigma$ mit dem Energieoperator. Wahre Bewegungskonstanten sind aber nur die eine Komponente, z.B. die z -Komponente

$$m_z + \frac{1}{2} \sigma_z = m + \frac{1}{2} \quad (5)$$

und das Quadrat

$$(\mathbf{m} + \frac{1}{2} \sigma)^2 = \mathbf{m}^2 + \sigma \mathbf{m} + \frac{3}{4} = j(j+1) = k^2 - \frac{1}{4} \quad (6)$$

mit $k=1, 2, 3, \dots$. Es gibt noch eine dritte sehr wichtige Bewegungskonstante, nämlich

$$\kappa = \beta (\sigma \mathbf{m} + 1) = \pm k \quad (7)$$

mit

$$\kappa^2 = \mathbf{m}^2 + \sigma \mathbf{m} + 1 = k^2. \quad (8)$$

Die entsprechenden Werte von \mathbf{m}^2 und $\sigma \mathbf{m}$ sind

$$\mathbf{m}^2 = k(k-1), \quad \sigma \mathbf{m} = k-1 \quad \text{oder} \quad \mathbf{m}^2 = k(k+1), \quad \sigma \mathbf{m} = -(k+1), \quad (9)$$

und zwar ist es so, daß das eine Wertepaar für die großen, das andere für die kleinen Komponenten gültig ist. Man kann es auch in

$$\mathbf{m}^2 = k^2 - \beta \kappa, \quad \sigma \mathbf{m} + 1 = \beta \kappa, \quad (10)$$

zusammenfassen. Die entsprechenden angulären Eigenfunktionen sind

$$\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}, \quad \bar{\Phi} = \{\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2\}, \quad (11)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= (k-m) P_{k-1}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, & \Phi_2 &= -P_{k-1}^{m+1}(\cos \vartheta) e^{i(m+1)\varphi}, \\ \bar{\Phi}_1 &= (k+m) P_k^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, & \bar{\Phi}_2 &= P_k^{m+1}(\cos \vartheta) e^{i(m+1)\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Mit

$$-p^2 = V^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \quad (13)$$

schreiben wir die Gl. (4) in der etwas anschaulicheren Form auf,

$$\left\{ \left[\alpha E + \beta c + \frac{\alpha Z}{r} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2 - \alpha^2 Z^2}{r^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - (c^2 - \alpha^2 E^2) + \frac{2\alpha^2 Z E}{r} \right] + \frac{\alpha Z}{r^3} \left[r \frac{\partial}{\partial r} - \sigma m \right] \right\} \psi = 0. \quad (14)$$

Sodann führen wir die neue Variable

$$x = 2r \sqrt{c^2 - \alpha^2 E^2} \quad (15)$$

mit samt den Verkürzungen

$$n^* = \frac{\alpha^2 Z E}{\sqrt{c^2 - \alpha^2 E^2}}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha Z}{\alpha E + \beta c} \sqrt{c^2 - \alpha^2 E^2} \quad (16)$$

ein. Die erste Gleichung ist die Feinstrukturformel

$$\frac{c^4}{E^2} = 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^{*2}} \quad \text{oder} \quad E = \frac{c^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^{*2}}}} \quad (17)$$

Man findet auch unschwer, daß ε der beiden Werte fähig ist

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1\} = -n^* \pm \sqrt{n^{*2} + \alpha^2 Z^2}. \quad (18)$$

Sie entsprechen den Werten $\beta = \pm 1$ und gelten, die erste ε_1 für die großen und die zweite ε_2 für die kleinen Komponenten.

Mit Hilfe der Gln. (10) und (15) und der Abkürzung

$$\lambda = \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2} \quad (19)$$

kann man nun die Gl. (14) auf die Form bringen

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} - (\lambda^2 - \beta \kappa) - \frac{x^2}{4} + n^* x + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon}{x} \left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx} - (\lambda^2 - 1) - \frac{x^2}{4} + n^* x \right] \right\} \psi = 0. \quad (20)$$

und bei der Substitution

$$\psi = e^{-\frac{1}{2} x^2} x^{\lambda-1} v, \quad (21)$$

$$\left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + (2\lambda - x) x \frac{d}{dx} - \lambda + \beta \kappa + n' x + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon}{x} \left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + (2\lambda - 1 - x) x \frac{d}{dx} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} v = 0. \quad (22)$$

Aus dem letzten Ausdruck dieser Gleichung sieht man, daß (21) die richtige Anfangspotenz von x hat, und aus dem ersten Ausdruck geht

hervor, daß

$$n' = n^* - \lambda \quad (23)$$

eine ganze Zahl $n' = 0, 1, 2, \dots$, ist, nämlich die radiale Quantenzahl, vorausgesetzt, daß v durch endliche Polynome darstellbar ist.

Wir führen nun geeignete Polynome $L_{m+n}^m(x)$ ein, die durch die Differentialgleichung

$$\left\{ x \frac{d^2}{dx^2} + (m+1-x) \frac{d}{dx} + n \right\} L_{m+n}^m(x) = 0, \quad (24)$$

oder genauer durch

$$\psi_m(x, s) = \frac{e^{-xs/(1-s)}}{(1-s)^{m+1}} = (-1)^{m'} \sum_{n=0}^{\infty} L_{m+n}^m(x) s^n \quad (25)$$

definiert sind, wobei m' die ganze Nachbarzahl der eventuell nicht-ganzen m ist. Wir setzen speziell

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= L_{2\lambda-1+n'}^{2\lambda-1}, & v_2 &= x L_{2\lambda+1+n'}^{2\lambda+1} / (2\lambda + n'), \\ v_3 &= L_{2\lambda-1+n'}^{2\lambda}, & v_4 &= L_{2\lambda+n'}^{2\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus (25) lassen sich dann die Beziehungen herleiten

$$\frac{d}{dx} v_1 = v_3, \quad v_3 = v_1 + v_4, \quad v_2 = \frac{n'}{2\lambda + n'} v_4 - v_3. \quad (27)$$

Wir setzen nun zunächst

$$v = c_1 v_1 + c_4 v_4 \quad (28)$$

und erhalten aus (22) mit Hilfe von (24) und (27)

$$\{(\beta\kappa - \lambda + \varepsilon) c_1 + (2\lambda + n') c_4\} v_1 + [2\varepsilon c_1 + (\lambda + \beta\kappa - \varepsilon) c_4] v_4 = 0. \quad (29)$$

Jeder der Koeffizienten von v_1 und v_4 muß gleich Null gesetzt werden. Das gibt zwei unabhängige Werte von c_1, c_4 die gleich sein müssen. Die Bedingungsgleichung kann geschrieben werden

$$\varepsilon^2 - 2n^* \varepsilon - \alpha^2 Z^2 = 0, \quad (30)$$

die von den beiden ε -Werten (18) befriedigt wird.

Wir haben nun die explizite Lösung von (22), die in einer bestimmten Normierung mit Hilfe von (27) in verschiedener Weise geschrieben werden kann,

$$\left. \begin{aligned} v &= v_1 - \frac{\beta\kappa - \lambda}{2\lambda + n'} v_4 \\ &= v_3 - \frac{\beta\kappa + \lambda + n' + \varepsilon}{2\lambda + n'} v_4 \\ &= v_2 - \frac{\beta\kappa - \lambda}{2\lambda + n'} v_4 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Für die großen Komponenten, $\beta = 1$, paßt die erste Form besonders gut im Falle $\kappa = k$, und die letzte im Falle $\kappa = -k$, indem so der Koeffizient von v_4 klein von der Größenordnung $x^2 Z^2$ wird. Die Form, die öfters angegeben wird, ist aber die mittlere (siehe z. B. die Handbuchartikel BETHES), die keine unmittelbare Verbindung mit den nicht-relativistischen Eigenfunktionen ergibt.

Am besten geeignet ist aber eine vierte Form

$$2\lambda v = (\beta\kappa + \lambda + \varepsilon) v_1 + (\beta\kappa - \lambda + \varepsilon) v_2, \quad (32)$$

die auch die besonders nützliche Eigenschaft besitzt, daß die höchste Potenz von x immer den Koeffizienten $(-1)^{m'-n'}$ hat, weil nach (25) v_1 und v_2 denselben mit 1 und -1 multiplizierten Koeffizienten besitzen.

Wir dürfen nun die Lösung der Vierkomponentengleichung folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} \kappa = k, \quad \psi &= \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\} = \{R\Phi, \bar{R}\bar{\Phi}\}, \\ \kappa = -k, \quad \psi &= \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\} = \{R\bar{\Phi}, \bar{R}\Phi\}, \end{aligned} \quad (33)$$

wobei Φ und $\bar{\Phi}$ die Zweikomponentenfunktionen der Gln. (41) und (42) bedeuten. Es ist dabei

$$\bar{R}(x) = C e^{-\frac{x}{2}} x^{\lambda-1} \bar{v}(x), \quad (34)$$

wobei mit $\bar{v}(x)$ angedeutet ist, daß es sich um die kleinen Komponenten handelt und deswegen $\beta = -1$ und $\varepsilon = \varepsilon_2$ zu setzen ist.

Es gilt nun noch die Konstante C zu bestimmen, indem wir an der ursprünglichen Vierkomponentengleichung zurückkehren. Um den etwas lästigen Operator αp los zu werden, multiplizieren wir aber die Gleichung mit αr und erhalten dabei die Gleichung

$$\left[\alpha \left(E + \frac{Z}{r} \right) - \beta c \right] (\alpha r) \psi = -i \varrho [i r p - \sigma m] \psi, \quad (35)$$

wobei ϱ die bekannte Dirac-Matrix ist, die durch $\alpha = \varrho \sigma$ definiert wird. Sie bewirkt eine Vertauschung der kleinen und großen Komponenten.

Andererseits kann man ohne viel Mühe zeigen, daß der Operator $r^{-1}(\alpha r)$, dessen Quadrat gleich Eins ist, eine Vertauschung von Φ und $\bar{\Phi}$ bewerkstelligt

$$(\alpha r) \Phi = r \bar{\Phi}, \quad (\alpha r) \bar{\Phi} = r \Phi. \quad (36)$$

Beim Übergang zur neuen Variable x entspricht das der Gleichung

$$\frac{E + c}{2} \frac{1}{c^2 - \alpha^2 E^2} \left[x + \alpha Z \right] \bar{R} = -i \left[x \frac{d}{dx} - \sigma m \right] R. \quad (37)$$

Der Operator $\frac{1}{c^2 - \alpha^2 E^2}$ bewirkt eine Erhöhung der höchsten Potenz mit einer Einheit und gleichzeitig eine Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$. Das gibt

uns den folgenden C -Wert

$$C = \frac{i}{c + \alpha E} \sqrt{c^2 - \alpha^2 E^2} = \frac{i}{\alpha Z} \varepsilon_1 = i \alpha Z (-\varepsilon_2). \quad (38)$$

Mit der Verkürzung $Y_i^m = P_i^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$ haben wir nun zusammenfassend

$$\left. \begin{aligned} (\kappa = k), \quad \psi &= \{R\Phi_1, R\Phi_2, \bar{R}\bar{\Phi}_1, \bar{R}\bar{\Phi}_2\}, \\ (\kappa = -k), \quad \psi &= \{R\bar{\Phi}_1, R\bar{\Phi}_2, \bar{R}\Phi_1, \bar{R}\Phi_2\}, \\ \{\Phi_1, \Phi_2\} &= \{(k+m)Y_{k-1}^m, -Y_{k-1}^{m+1}\}, \\ \{\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2\} &= \{(k-m)Y_k^m, Y_k^{m+1}\}, \\ R &= e^{-\frac{i}{2}} x^{\lambda-1} v(x), \quad \bar{R} = i\alpha Z (-\varepsilon_2) e^{-\frac{i}{2}} x^{\lambda-1} \bar{v}(x). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Oslo, Institut für Theoretische Physik der Universität.

Spektrum und Richtungsverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung einer dünnen Antikathode*.

Von

R. KERSCHER und H. KULENKAMPFF.

Mit 6 Figuren im Text.

(Eingegangen am 22. Februar 1955.)

Mit einem Proportionalzählrohr wurde die spektrale Energieverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung einer dünnen Al-Antikathode bei 34 kV in verschiedenen Emissionsrichtungen gemessen und daraus die Richtungsverteilung für verschiedene Frequenzen des Spektrums ermittelt. Für die Grenzfrequenz ν_g ergeben sich in den Richtungen 0° und 180° von Null verschiedene Intensitäten; für kleinere Frequenzen zeigt sich eine zunehmende Auffüllung der Minima im Sinne der SOMMERFELDSchen Theorie.

Einleitung.

Untersuchungen über die räumliche Intensitätsverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung und ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge ergeben nur dann ein richtiges Bild, wenn alle zur Strahlungserzeugung beitragenden Elektronen die gleiche Anfangsrichtung und -energie haben. In einer normalen (massiven) Antikathode ist beides nicht der Fall, weil die Elektronen beim Eindringen in die Antikathode gestreut werden und Energieverluste erleiden.

Um diese fälschenden Einflüsse klein zu halten, verwandte erstmals KULENKAMPFF [1] dünne Al-Folien (Dicke $0,6\mu$) als Antikathode. Die hierbei noch auftretenden Energieverluste stören nicht merklich, eine hinreichende Ausschaltung der Diffusion erfordert jedoch wesentlich dünnere Folien. Bei Fortsetzung der Untersuchungen verwandte deshalb BOHM [2] auf Colloidiumhautehen aufgedampfte Schichten von weniger als 1000 \AA Dicke. Wegen Behinderung durch die anfallenden und durch die Folien hindurchgehenden Elektronenstrahl konnten diese Messungen nur in einem Winkelbereich von 25° bis 150° durchgeführt werden. Da aber die Richtungen 0° und 180° besonders interessant sind, wurde bei späteren Messungen von HONERJÄGER [3], der ausmeßbare Winkelbereich auf diese Richtungen erweitert, indem der Elektronenstrahl durch ein homogenes Magnetfeld auf einer Kreisbahn geführt wurde.

Wegen der äußerst geringen Belastbarkeit der dünnen Folien (Stromstärke $< 10^{-6}$ Amp) reicht die Strahlungsintensität zu einer spektralen Zerlegung mittels Kristallspektrometer nicht aus. Die Abhängigkeit der Richtungsverteilung von der Frequenz konnte deshalb bisher nur

* Würzburger Dissertation (R. KERSCHER).

näherungsweise durch Aussonderung von Spektralbereichen mittels geeigneter Filterung untersucht werden. Dabei bleibt es fraglich, wie weit etwa die von HONERJÄGER mit sehr starker Filterung gemessene Verteilungskurve für die Grenzfrequenz richtig bzw. noch durch Mitwirkung benachbarter Frequenzbereiche entsteht ist; ebenso ist die Aussonderung im Bereich kleiner Frequenzen im Spektrum durch Filterkombinationen bei BÖHM unsicher.

Inzwischen hat sich gezeigt, daß das Proportionalzählrohr besonders geeignet ist für Spektraluntersuchungen an sehr schwacher Röntgenstrahlung. Für die Emissionsrichtung 90° konnten AMREHN und KULENKAMPEF⁴ damit genaue Untersuchungen über die Energieverteilung im Spektrum der Bremsstrahlung dünner Antikathoden ausführen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, unter Verwendung des gleichen Proportionalzählrohrs die Untersuchungen auf die Abhängigkeit von der Emissionsrichtung auszudehnen und damit die Messungen von HONERJÄGER für die Grenzfrequenz nachzuprüfen und nach kleineren Frequenzen im Spektrum zu erweitern.

Wie bei HONERJÄGER wurde eine Spannung von 34 kV ($\beta = 0,35$) und als Material der Antikathodenfolie Al ($Z = 13$) gewählt. In der SOMMERFELDSchen Theorie der Bremsstrahlung werden zur Vereinfachung die Forderungen $\beta \ll 1$ und $Z \gg 137\beta$, $\beta \ll 1$ aufgestellt; sie lassen sich gemeinsam praktisch nur unvollkommen erfüllen, am besten noch mit den angegebenen Werten von β und Z , die aus diesem Grunde gewählt wurden.

I. Versuchsanordnung.

1. Strahlungsquelle.

Die Strahlungsquelle ist schematisch in einem Horizontalschnitt in Fig. 1 dargestellt. Der Elektronenstrahl wird auf seinem Wege von der Kathode K durch die Antikathodenfolie F zu einem Auffänger-Sonde S durch ein Magnetfeld auf einer Kreisbahn vom Radius $r = 5$ cm geführt. Das dazu erforderliche Magnetfeld wurde von zwei Spulen in HELMHOLTZscher Anordnung erzeugt. Als Hochspannungsquelle für die Beschleunigung der Elektronen diente eine Gleichspannungsanlage der Siemens-Reiniger-Werke; sie hat auch bei den größten benutzten Stromstärken nur eine Welligkeit von ± 15 V.

Das Vakuumgefäß besteht aus zwei zylindrischen Messinggehäusen Z_1 und Z_2 mit einem Verbindungsrohr V und einem Ansatzrohr R . In Z_1 befindet sich die auf Hochspannung liegende Glühkathode K , von oben mittels Glasschliff isoliert

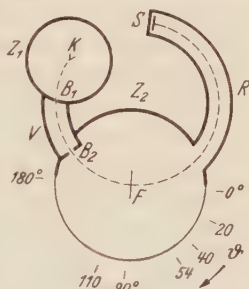


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung. Horizontalschnitt. K Kathode; F Antikathodenfolie; S Auffänger. Die Elektronenbahn ist gestrichelt eingezeichnet.

und justierbar gehalten. Zwischen K und der Wandung von Z_1 werden die Elektronen beschleunigt, die kreisförmige Blende B_1 (Durchmesser 0,7 mm) begrenzt einen engen Strahl, der durch das Verbindungsrohr V in das Gehäuse Z_2 eintritt. Die Blende B_2 , die vom Elektronenstrahl selbst nicht getroffen wird, hat dabei die Aufgabe, Strahlung, die im Rohr V durch gestreute Elektronen entsteht, vom Raum Z_2 fernzuhalten. Nach dem Durchgang durch die Antikathodenfolie verläuft der Elektronenstrahl weiter in das gekrümmte Ansatzrohr R und trifft an dessen Ende zum Teil auf die isolierte Sonde S , die über ein Meßinstrument zur Erde abgeleitet ist. Wegen der Streuung in der Antikathodenfolie tritt allerdings ein Teil der Elektronen auf die Wandung von R und erzeugt dort (im massiven Material) eine intensive Röntgenstrahlung. Der größte Teil dieser Strahlung wird durch die Krümmung des Rohres abgeblendet; soweit das nicht der Fall ist, fällt dadurch ein gewisser Winkelbereich für die Messung aus. (Vgl. dazu Abschnitt II, 1.) Einzelne stärker gestreute oder aus massiven Teilen rückdiffundierte Elektronen können die Wandung von Z_2 treffen. Um die hierbei erzeugte Wandstrahlung zu vermindern, ist das Innere von Z_2 mit kolloidalem Graphit bestrichen.

In der Mitte von Z_2 trifft der Elektronenstrahl auf die Antikathodenfolie F , nachdem er einen Viertelkreis zurückgelegt hat; die Folie befindet sich also an der Stelle des Elektronenstrahles, an der er seinen größten Querschnitt hat. Dies ist günstig, weil wegen der geringen Belastbarkeit der Folien die Stromdichte im Brenntleck möglichst niedrig sein soll. Die Antikathodenfolie wird von oben durch einen Glasschliff gehalten. Konzentrisch dazu ist ein zweiter Glasschliff angebracht, mittels dessen eine Sonde um die Folie herumgeführt werden kann. Damit können Form und Lage des Elektronenstrahls vor und hinter der Folie kontrolliert werden.

Als Austrittsfenster für die zu messende Strahlung ist in die Wandung des Zylinders Z_2 ein durchgehender Schlitz von 5 mm Höhe gefräst, welcher in der Ebene der Elektronenkreisbahn liegt. Er ist mit einer 0,05 mm starken Al-Folie verschlossen und gestattet Messungen in jeder Winkelstellung zwischen -5° und $+185^\circ$.

Als Antikathode diente bei den hier beschriebenen Messungen eine Al-Folie der Dicke $250 \pm 35 \text{ \AA}$, aufgedampft auf eine Trägerfolie von etwa 1000 Å Collodium. Diese wurde von einem leichten Al-Drahtring von 2 cm Durchmesser gehalten. Durch den Elektronenbeschluß wird die Trägerfolie im Brenntleck verkohlt, wodurch sich ihre Masse und mittlere Ordnungszahl reduziert; sie trägt dann noch etwa 20% zur entstehenden Röntgenstrahlung bei.

2. Meßanordnung.

Zur Messung der Strahlung wurde ein von H. AMREHN entwickeltes Proportionalzahlrohr mit anschließendem Rohrenverstärker benutzt, welches in der Arbeit von AMREHN und KULENKAMPFF [4] beschrieben ist. Die Registrierung und Ausmessung der Zahlrohrimpulse erfolgten in der dort angegebenen Weise. Zur Eichung der Impulshöhe diente

hier die Cu-K_α-Linie, welche kurz vor oder nach jeder Meßreihe aufgenommen wurde. Dazu wurde mit dem oben erwähnten Doppelschliff die aus Kupfer bestehende Sonde in den Elektronenstrahl gedreht.

Die Aufstellung des Zählrohres erfolgte so, daß die Strahlung parallel zum Zählrohr in das Zählrohr einfiel. Ein Blendensystem vor dem Eintrittsfenster des Zählrohres begrenzte den Öffnungswinkel der Strahlung auf einen Winkelbereich von knapp 1°. Ein Zielfernrohr, welches starr mit dem Proportionalzählrohr verbunden war, ermöglichte ein genaues Justieren der Achse des Blendensystems auf den Brennfleck.

II. Messungen.

1. Durchführung der Messungen.

Ohne Anwendung eines Impulshöhen-Analysators (Kanalverstärker) ist es nicht möglich, mit dem Proportionalzählrohr die Richtungsverteilung für eine fest vorgegebene Frequenz aus dem Spektrum der Bremsstrahlung in kontinuierlicher Messung zu bestimmen. Deshalb wurde in der vorliegenden Arbeit zunächst das Spektrum unter einzelnen festen Winkeln θ ausgemessen und anschließend aus diesen Spektren für verschiedene Frequenzen die räumliche Intensitätsverteilung abgeleitet.

Derartige Messungen wurden unter den Winkeln $\theta = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 54^\circ, 90^\circ, 110^\circ$ und 180° ausgeführt, die in Fig. 1 eingezeichnet sind. Die Beobachtungsrichtung 54° wurde gewählt, weil unter diesem Winkel das Maximum der Intensität für die Grenzfrequenz liegt. Im Bereich zwischen 120° und 170° waren Messungen nicht möglich, weil hier eine zu starke Strahlung von den hinter der Folie liegenden Wandteilen überlagert war; sie stammt, wie aus Fig. 1 ersichtlich, vom Ansatzrohr R und seiner näheren Umgebung und wird von wenigen in der Antikathodenfolie stark gestreuten Elektronen erzeugt.

Zur Messung wurde das Zählrohr jeweils fest auf einen der gewählten Winkel eingestellt und die Impulsverteilung aufgenommen. Nulleffekt und überlagerte Wandstrahlung wurden unmittelbar anschließend bestimmt; dazu wurde das Zählrohr, mit Visierrichtung auf die gleiche Stelle der Wand hinter der Antikathode, soweit gedreht, daß Strahlung vom Brennfleck nicht mehr hineingelangte. Dabei zeigte sich, daß bei keinem der angegebenen Winkel die Wandstrahlung merklich über dem reinen Nulleffekt lag. Dieser selbst betrug, im Mittel über die verschiedenen Impulshöhen, weniger als 2% der Strahlung von der Antikathode; für einzelne Impulshöhenintervalle, besonders in der Nähe der Grenzfrequenz, liegt allerdings der Nulleffekt wesentlich höher und erreicht maximal ungefähr 50%.

Die Strahlungsintensitäten in den einzelnen Emissionsrichtungen unterscheiden sich sehr stark (bis 20:1). Die mittlere Impulszahl pro

Sekunde darf aber wegen des Nulleffektes nicht zu klein und wegen des Auflösungsvermögens der Anordnung nicht zu groß sein; der günstigste Wert liegt bei etwa 80 Impulsen pro Sekunde. Die Aufnahmen der Spektren in verschiedenen Beobachtungsrichtungen mußten deshalb bei verschiedener Stärke des Elektronenstromes gemacht werden. Aus apparativen Gründen ist die Messung der jeweiligen Elektronenstromstärke für eine Umrechnung zu unsicher. Die wahren Intensitätsverhältnisse der Spektren unter verschiedenen Winkeln wurden deshalb in gesonderten Meßreihen bei sorgfältig konstant gehaltener Stromstärke dadurch bestimmt, daß die Impulszahlen über einen großen Spektralbereich verglichen wurden.

2. Auswertung.

Die Auswertung der Registrierfilme erfolgte in der gleichen Weise wie bei AMREHN und KULENKAMPFF [4]; dabei wurden die Impuls Höhen in Intervalle eingeteilt, deren Breite einem ΔE von etwa 1,3 keV entspricht. Die so ermittelte Impulshöhenverteilung wurde dann hinsichtlich des Auflösungsvermögens des Zählrohrs korrigiert. Die weiter noch erforderlichen Korrekturen für Absorptionen im Strahlengang und im Zählrohr sind für alle Richtungen die gleichen. Da die spektrale Verteilung für $\theta = 90^\circ$ nach den Untersuchungen von AMREHN und KULENKAMPFF bekannt ist, können wir uns im folgenden auf die Angabe der relativen Intensitäten $i_\theta(\theta)/i_\theta(90^\circ)$ beschränken. Damit entfallen die weiteren Korrekturen; außerdem ergibt sich eine Darstellung, die unmittelbar mit einer vereinfachten Schreibweise der SOMMERFELD'schen theoretischen Formeln vergleichbar ist, welche SCHERER und ZEITLER in der nachfolgenden Arbeit [5] ableiten.

III. Ergebnisse.

1. Spektrale Energieverteilung.

Die auf diese Weise für die verschiedenen Emissionsrichtungen erhaltenen Spektren sind in Fig. 2 und 3 dargestellt; der Übersichtlichkeit halber in zwei Gruppen aufgeteilt. Die einzelnen Meßpunkte zeigen eine nicht unerhebliche Streuung, da zwar insgesamt rund 64000 Impulse ausgemessen wurden, diese sich aber auf 7 Spektren verteilen; die statistischen Fehlergrenzen, die mit wachsendem r zunehmen, sind bei einigen Meßpunkten angezeigt.

Alle Spektren lassen sich sehr gut durch einfache gerade Linien darstellen, die sich trotz der Streuung der Meßpunkte ohne größere Willkür festlegen lassen. Die Spektren für $\theta = 0^\circ$ und 180° zeigen den steilsten Anstieg von der Grenzfrequenz ν_0 nach kleineren Frequenzen hin, und zwar ist bei beiden der relative Anstieg recht genau der gleiche; für alle

Frequenzen ist das Intensitätsverhältnis $i(0^\circ)/i(180^\circ) = 4,5$. Der Anstieg ist geringer für $\theta = 20^\circ$ und nur noch schwach ausgeprägt bei $\theta = 40^\circ$, ebenso bei $\theta = 110^\circ$. Das Spektrum für $\theta = 54^\circ$ zeigt einen ganz schwachen Abfall nach kleineren Frequenzen hin. Für etwas größere Winkel wäre ein etwas steilerer Abfall zu erwarten (Maximum der Härte bei etwa 65°), jedoch ist der zu erwartende Unterschied so gering, daß weitere Messungen zwischen 54° und 90° nicht lohnend erschienen.

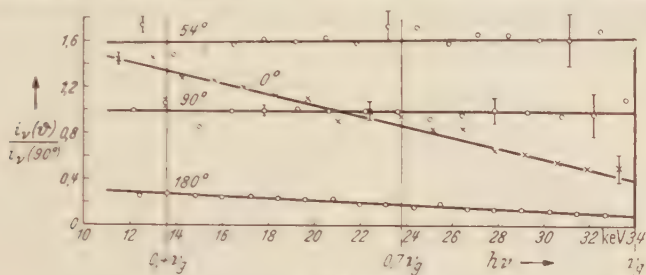


Fig. 2.

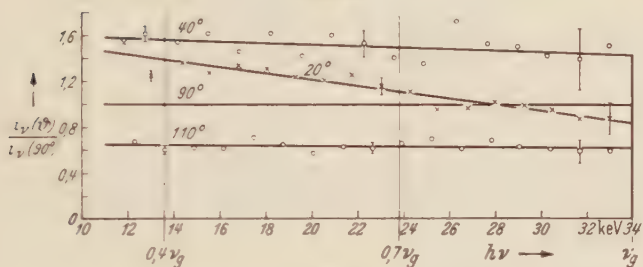


Fig. 3.

Fig. 2 u. 3. Spektrale Energieverteilung in Abhängigkeit von der Emissionsrichtung (Al, 34 kV).

Erwähnt sei, daß die vollständige Auswertung der Messungen unter Berücksichtigung der Absorptionskorrektur für $\theta = 90^\circ$ einen Verlauf des Spektrums ergab, der innerhalb der Fehlergrenzen mit dem bei der genaueren Messung von AMREHN und KULENKAMPFF [4] ermittelten übereinstimmt. Da dieser vom Verlauf $i_\nu = \text{const}$ nur unbedeutend abweicht, ist auch die absolute Form der Spektren für andere Richtungen nicht wesentlich von dem in Fig. 2 dargestellten relativen Verlauf verschieden.

2. Richtungsverteilung.

Aus Fig. 2 und 3 läßt sich nun leicht die Richtungsverteilung ableiten. Diese ist für die Frequenzen ν_g , $0,7 \nu_g$ und $0,4 \nu_g$ in Fig. 4 dargestellt. Die dort eingetragenen „Meßpunkte“ sind die zu den einzelnen Frequenzen gehörenden Ordinatenwerte der ausgleichenden geraden Linien in Fig. 2 und 3; ihre Fehlergrenzen sind jetzt also im wesentlichen durch die Ungenauigkeit in der Bestimmung der relativen Intensitäten

der zunächst bei verschiedenen Stromstärken gemessenen einzelnen Spektren bedingt, die etwa $\pm 5\%$ beträgt. Für jede Kurve der Fig. 4 stehen nur 7 Punkte zur Verfügung; sie wurden deshalb in Anlehnung an die nach der Theorie zu erwartende Kurvenform, jedoch unter möglichst guter Anpassung an die Meßpunkte gezeichnet.

Einen besseren Eindruck von der räumlichen Verteilung vermittelt die auch in früheren Arbeiten benutzte Darstellung in Polarkoordinaten. In Fig. 5 sind deshalb für die 3 Frequenzen die Verteilungskurven nochmals in dieser Weise wiedergegeben.

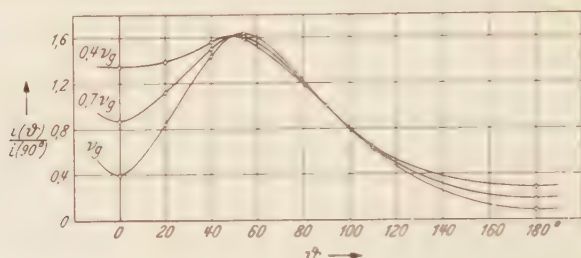


Fig. 4. Richtungsverteilung der Strahlung für 3 Frequenzen des Spektrums, abgeleitet aus den Spektren der Fig. 2 u. 3.

3. Diskussion der Ergebnisse.

In der nachfolgenden Arbeit von SCHLIER und ZEITLER⁵ wird gezeigt, daß die auf $\theta = 90^\circ$ normierten Spektren sich durch die einfache Formel darstellen lassen

$$i_r(\theta) i_r(90^\circ) = G(\theta) + (1 - p) F(\theta),$$

worin $F(\theta)$ und $G(\theta)$ reine Funktionen von θ , unabhängig von r , sind; p ist der unter $\theta = 90^\circ$ zu messende, von der Frequenz r abhängige Polarisationsgrad. Bei Auftragung gegen die Abszisse p (statt r) sollten also alle Spektren einfach gerade Linien sein, da p über einen nicht zu großen Frequenzbereich angenähert linear von r abhängt, gilt dies auch für die Abszisse r , wie es unsere Messungen zeigen. Allerdings ist in dem hier betrachteten Bereich von r , bis $0.4r$, die Kurve für p in Abhängigkeit von r nach Fig. 2 bei SCHLIER und ZEITLER schon merklich gekrümmt, so daß für die stärker ansteigenden Spektren, insbesondere bei $\theta = 0^\circ$ und 180° , ein eben merklich gegen die Abszissenachse konvex gekrümmter Verlauf zu erwarten wäre. Unsere Meßpunkte zeigen keine Andeutung in diesem Sinne, jedoch sind die Fehlergrenzen immerhin so hoch, daß wir daraus noch nicht auf eine reelle Abweichung schließen können.

Die Verteilungskurven (Fig. 4 und 5) zeigen deutlich die schon bei früheren qualitativen Messungen mit gehörter Strahlung beobachtete

Verbreiterung bei kleineren Frequenzen im Spektrum, mit schwacher Verlagerung des Maximums zu kleineren Winkeln und Auffüllung der beiden Minima, insbesondere in der Umgebung der 0-*Richtung*. Diese kann jetzt zuverlässig bis zu kleineren Frequenzen verfolgt werden; man bemerkt, daß bei $0,4 \nu_g$ die Einsattelung nur noch sehr gering ist. Eine in der dünnen Antikathode etwa noch eintretende Streuung der Elektronen kann deshalb diese Verteilungskurve nicht merklich fälschen und es ist bemerkenswert, daß die bei $0,4 \nu_g$ festgestellte Auffüllung des Minimums deutlich geringer ist als nach den ursprünglich von SOMMERFELD [6] angegebenen Näherungsformeln. Diese liefern $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 1,8$ und ein Maximum bei $\vartheta = 30^\circ$; dagegen führt die von SCHEER und ZEITLER abgeleitete Formel zu sehr befriedigender Übereinstimmung mit unserer Messung (vgl. dort Fig. 5).

Für die Grenzfrequenz ν_g zeigt sich bei $\vartheta = 0^\circ$ und 180° mit Sicherheit ein endlicher Intensitätswert, während in früheren Arbeiten nach der von SCHERZER [7] angegebenen Näherungsformel hierfür der Wert Null erwartet worden war. Es ist also nötig, bei der theoretischen Behandlung höhere Potenzen von Z 137β zu berücksichtigen. Dies ergibt nach der Darstellung bei SCHEER und ZEITLER 5, für unseren Fall mit $p = 0,95$ einen Erwartungswert $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 0,12$.

Demgegenüber fand HONERJÄGER 3 bei der gleichen Spannung von 34 kV an gefilterter Strahlung bei einer Al-Folie von 100 Å Dicke $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 0,3$, bei einer Al-Folie von 350 Å Dicke $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 0,45$. Unsere Messung mit einer Al-Folie mit 250 Å Dicke ergibt nach Fig. 2 $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 0,4$. Nach Betrachtungen von BLUNCK [8] ist bei einer Al-Schichtdicke von 100 Å keine Fälschung der Intensität durch Streuung von Elektronen mehr zu erwarten; die Zunahme der 0°-Intensität bei größeren Foliendicken kann zum Teil, allerdings nicht vollständig, auf Streuung der Elektronen zurückgeführt werden, so daß die angeführten 3 Werte untereinander in noch einigermaßen befriedigender Übereinstimmung zu stehen scheinen.

Der Grund für die Erhöhung gegenüber dem theoretischen Erwartungswert ist aber in den beiden Arbeiten ohne Zweifel verschieden. HONERJÄGER hat darauf verzichtet, den durch die Filterung ausgesonderten Spektralbereich zu berechnen und auch BLUNCK erörtert nicht weiter einen etwaigen Einfluß mangelhafter Monochromasie der

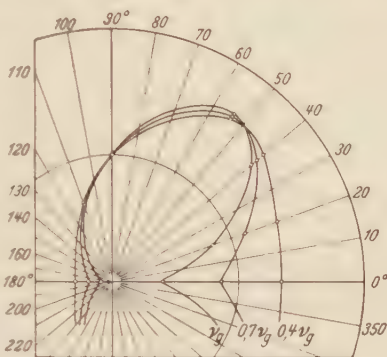


Fig. 5. Richtungsverteilung der Strahlung, dargestellt in Polarkoordinaten.

Strahlung. Da jetzt die Form des Spektrums hinreichend bekannt ist, läßt sich diese Berechnung leicht nachholen. Wir haben dazu angenommen: $i_v(90^\circ) = \text{const} = 1$; $i_v(0^\circ) = 0,12 + 0,06 \cdot (\hbar\nu_g - \hbar\nu)$, mit $\hbar\nu$ in keV. Für insgesamt 6,5 mm Al-Filterung ergeben sich dann die in Fig. 6 dargestellten Kurven. Wie man sieht, erstreckt sich das Spektrum der gefilterten Strahlung über einen beträchtlichen Frequenzbereich; sein Schwerpunkt liegt für $\theta = 0^\circ$ bei einer merklich kleineren Frequenz als für $\theta = 90^\circ$. Aus dem Verhältnis der Flächen ergibt sich unmittelbar $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 0,34$ in Übereinstimmung mit der Messung. Der hohe

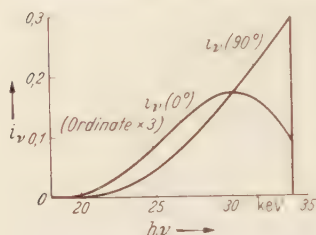


Fig. 6. Zur Messung von HONERJÄGER: Berechnete Spektren der durch 6,5 mm Al gefilterten Strahlung. Kurve $i_v(0^\circ)$ dreifach überhöht.

Wert für $i(0^\circ)$ bei HONERJÄGER kann also allein auf die ungenügende Wirkung der Filterung zurückgeführt werden.

Auch wenn man berücksichtigt, daß die Anzeige des von HONERJÄGER verwendeten Zählrohres mit Glaswandung frequenzabhängig ist, ändert sich das Verhältnis nicht wesentlich; bei Annahme einer proportional ν^{-2} verlaufenden Empfindlichkeit (für die Intensitäten $N \cdot \hbar\nu$, N = Anzahl Quanten) erhöht es sich auf etwa 0,34. Die Filtermethode gestattet jedoch keine genauere Aussage über die Form des Spektrums; der gemessene Wert wäre auch noch mit der Annahme $i(0^\circ) = 0$ für $\nu = \nu_g$ verträglich.

Unsere Spektralmessung ergibt jedoch unmittelbar den Wert für die Grenzfrequenz ν_g selbst. Der theoretisch zu erwartende Wert $i(0^\circ)/i(90^\circ) = 0,12$ kann durch Streuung der Elektronen in der 250 Å dicken Al-Folie auf höchstens 0,2 erhöht werden. Man könnte vielleicht daran denken, daß der experimentelle Wert von 0,4 durch stärkere Streuung infolge sehr ungleichmäßiger Dicke der Al-Folie hervorgerufen sei, jedoch wird diese Möglichkeit durch das gefundene Verhältnis $i(0^\circ)/i(180^\circ)$ ausgeschlossen. Aus der Darstellung bei SCHEER und ZEITLER geht nämlich hervor, daß durch Streuung hervorgerufene Intensitäten bei $\theta = 0^\circ$ bzw. 180° sich wie $[(1+\beta)/(1-\beta)]^4 = 19:1$ verhalten sollten [Funktion $G(\theta)$], während die wahren Intensitäten sich wie $[(1+\beta)/(1-\beta)]^2 = 4,35:1$ verhalten müssen [Funktion $F(\theta)$]; experimentell wurde aber gerade ein Verhältnis von etwa 4,5:1 gefunden.

Dies deutet darauf hin, daß für die Erhöhung der Intensitäten ein Umstand verantwortlich ist, der eine Erniedrigung des Polarisationsgrades p bewirkt. Wir vermuten deshalb, daß unsere Al-Folie mit einer geringen Menge eines schweren Elementes (etwa W oder Hg) verunreinigt war. Ein sicherer Nachweis hierfür konnte bisher zwar nicht erbracht werden, jedoch muß beides als möglich betrachtet werden (W vom Aufdampfen des Al her, Hg aus der verwendeten Quecksilber Diffusionspumpe). Nach Gl. (4) bei SCHEER und ZEITLER [5] ist die wahre Intensität unter 0° und 180° proportional $(1-p)$. Für Al ist $p = 0,95$, für W

oder Hg ist etwa $p = 0,70$. Es würde deshalb eine Verunreinigung von der Größenordnung 1 At.-% genügen, um den Betrag der beobachteten Intensitäten zu erklären.

Mit abnehmender Frequenz im Spektrum wird, wie aus dem Verlauf des Polarisationsgrades zu entnehmen ist (vgl. Fig. 2 bei SCHEER und ZEITLER), der fälschende Einfluß solcher Verunreinigungen immer geringer; die Verteilungskurven für die kleineren Frequenzen dürften also kaum entstellt sein. Für die Grenzfrequenz ν_g gestatten aber unsere bisherigen Ergebnisse nur die Aussage, daß die Intensität in der 0°- und 180°-Richtung $\rightarrow 0$ ist. Bei reinen und zugleich dünneren (etwa 100 statt 250 Å) Al-Folien sind für diese beiden Richtungen Intensitäten zu erwarten, deren Absolutwerte bei gleichem Elektronenstrom um etwa 1 Zehnerpotenz geringer sind als bei den hier beschriebenen Messungen. Weitere Untersuchungen können deshalb mit Aussicht auf Erfolg erst ausgeführt werden, wenn eine verbesserte Versuchsanordnung fertiggestellt ist, bei der auch die von vagabundierenden Elektronen erzeugte störende Wandstrahlung entsprechend reduziert ist.

Literatur.

- [1] KULENKAMPFF, H.: Ann. Physik **87**, 597 (1928). — [2] BÖHM, K.: Ann. Physik **33**, 315 (1938). — [3] HONERJÄGER, R.: Ann. Physik **38**, 33 (1940). — [4] AMREHN, H., u. H. KULENKAMPFF: Z. Physik **140**, 452 (1955). — [5] SCHEER, M., u. E. ZEITLER: Z. Physik **140**, 642 (1955). — [6] SOMMERFELD, A.: Ann. Physik **11**, 257 (1931). — [7] SCHERZER, O.: Ann. Physik **13**, 137 (1932). — [8] BLUNCK, O.: Z. Physik **130**, 632 (1951).

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

Zum Vergleich der Sommerfeldschen Theorie der Röntgen-Bremsstrahlung mit experimentellen Untersuchungen.

Von

M. SCHEER und E. ZEITLER*.

Mit 5 Figuren im Text.

(Eingegangen am 22. Februar 1955.)

Es wird eine einfache Schreibweise der Ergebnisse der SOMMERFELDSchen Theorie der Röntgen-Bremsstrahlung angegeben, die besonders für den Vergleich mit experimentellen Untersuchungen geeignet ist.

1. Umformung der SOMMERFELDSchen Gleichungen.

Die Fragen der Energie- und Winkelverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung einer dünnen Antikathode sind von SOMMERFELD [1] unter gewissen Voraussetzungen theoretisch prinzipiell gelöst. Für einen Vergleich mit experimentellen Untersuchungen, wie sie von KERSCHER und KULENKAMPEFF [2] durchgeführt wurden, benutzen wir die Ergebnisse, die SOMMERFELD mit der Methode des Vektorpotentials gewinnt.

SOMMERFELD hat die Rechnung in einer Reihenentwicklung nach Potenzen von β durchgeführt, in der er nur die in β linearen Glieder berücksichtigt. Er erhält so zunächst ein Zwischenergebnis, das wir unter Vernachlässigung eines für unsere Überlegungen unwichtigen Faktors schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} i(r, \vartheta) d\vartheta d\omega &= \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} \times \\ &\times [(M_x^2 \sin^2 \vartheta + M_z^2 \cos^2 \vartheta)(1 + 2\beta \cos \vartheta) + M_z^2(1 - 2\beta \cos \vartheta)] d\vartheta d\omega. \end{aligned} \right\} (1)$$

Aus (1) erhält SOMMERFELD durch etwas andere Zusammenfassung unter Vernachlässigung von β^2 sein Endergebnis, in dem β explizit nur in den für retardierte Rechnungen typischen Vordrucken erscheint:

$$i(r, \vartheta) d\vartheta d\omega = c \left[M_x^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} + M_z^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} \right) d\vartheta d\omega. \right] (2)$$

In (1) und (2) ist ϑ die Ausstrahlungsrichtung, gemessen gegen die Richtung der einfallenden Elektronen. Wegen der von r abhängigen Größen M_x^2 und M_z^2 sei auf die SOMMERFELDSche Arbeit verwiesen. Hier interessiert nur, daß sich aus ihnen der für $\vartheta = 90^\circ$ zu messende Polarisationsgrad berechnet:

$$p = \frac{M_x^2 - M_z^2}{M_x^2 + M_z^2}. \quad (3)$$

* E. ZEITLER, jetzt AGFA-Photofabrik, Leverkusen, Röntgenprüfstelle.

Die Ergebnisse der SOMMERFELDSchen Rechnungen werden sehr anschaulich, wenn man die absoluten Intensitäten auf die Intensitäten für $\vartheta = 90^\circ$ bezieht, also zu relativen Intensitäten übergeht und nach (3) β statt der Größen M^2 einführt. Aus (1) oder (2) erhält man diese relativen Intensitäten in einfacher Rechnung in der Form

$$Q(\nu, \vartheta) = \frac{i(\nu, \vartheta)}{i(\nu, 90^\circ)} = F(\vartheta) + (1 - \beta(\nu)) \cdot G(\vartheta). \quad (4)$$

Die relativen Intensitäten stellen sich als einfache Verknüpfung zweier nur vom Winkel abhängiger Ausdrücke mit nur einer, von der Lage im Spektrum abhängigen Größe, dem Polarisationsgrad dar. Da SOMMERFELD beim Übergang von (1) nach (2) einige Vernachlässigungen macht, gehen wir zur Gewinnung der Funktionen F und G von seinem Zwischenergebnis (1) aus; daraus ergibt sich zunächst

$$F(\vartheta) = \sin^2 \vartheta \cdot \frac{1 + 2\beta \cos \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2},$$

$$G(\vartheta) = \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} \times [1 - \sin^2 \vartheta (1 + 2\beta \cos \vartheta)].$$

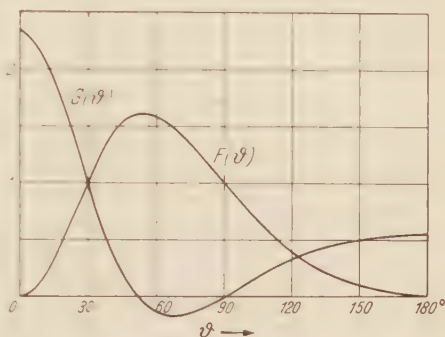


Fig. 1. Verlauf der Funktionen $F(\vartheta)$ nach (5) und $G(\vartheta)$ nach (6) für 34 keV.

Durch nachträgliche sinngemäße Übertragung des SOMMERFELDSchen Überganges von (1) nach (2) erhalten wir dann die endgültige Form

$$F(\vartheta) = \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4}, \quad (5)$$

$$G(\vartheta) = \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^2} \right). \quad (6)$$

Für 34 keV ($\beta = 0,348$) sind $F(\vartheta)$ und $G(\vartheta)$ in Fig. 1 dargestellt.

2. Zusammenhang zwischen Polarisationsgrad und Frequenz.

Für den Vergleich mit den Messungen von KERSCHER und KULENKAMPEF brauchen wir nun noch den Zusammenhang zwischen Polarisationsgrad und Lage im Spektrum. Wir entnehmen ihn den Arbeiten von WEINSTOCK ³ und KIRKPATRICK und WIEDMAN ⁴. WEINSTOCK verzichtet in seiner Arbeit auf die von SOMMERFELD zur Gewinnung geschlossener Ausdrücke benutzte Näherung $\frac{Z}{137\beta} \ll 1$ (Z = Kernladungszahl des Antikathodenmaterials). Er erhält so unter Mitnahme aller Feinheiten der SOMMERFELDSchen Ansätze eine nur schwach konvergierende Reihenentwicklung für die Größen M_1^2 und M_2^2 . KIRKPATRICK

und WIEDMAN haben diese Reihen für einen großen Bereich des Parameters $\frac{Z}{137\beta}$ numerisch ausgewertet und auch Werte und Kurven für den nach (3) berechneten Polarisationsgrad angegeben. Für eine Energie von 34 keV sind die Ergebnisse dieser Rechnungen für drei Elemente in Fig. 2 dargestellt. Gemeinsam ist den Kurven für verschiedene Elemente der monotone Anstieg im Spektrum. Der von SOMMERFELD berechnete Grenzfall mit $\frac{Z}{137\beta} \ll 1$ führt an der kurzwelligen Grenze des Spektrums zu vollständig polarisierter Strahlung. Dort ist aber nach den Rechnungen von KIRKPATRICK und WIEDMAN die Abhängigkeit des Polarisationsgrades von der

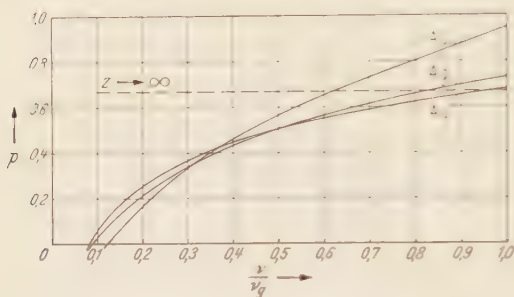


Fig. 2. Polarisationsgrad bei 34 keV für verschiedene Elemente nach KIRKPATRICK und WIEDMAN.

Ordnungszahl des Antikathodenmaterials besonders groß; mit zunehmender Ordnungszahl nähert sich der Polarisationsgrad dem Wert $\frac{2}{3}$. Gleichzeitig werden die Werte im langwelligen Teil des Spektrums angehoben. In der Nähe der langwelligen Grenze sind die Werte des Polarisationsgrades durch

die theoretisch bisher nicht berücksichtigte Abschirmung sehr unsicher. Für $\nu < \sim 0,2\nu_g$ möchten wir daher die Kurven von KIRKPATRICK und WIEDMAN nur mit Vorbehalt verwenden.

3. Spektren und Richtungsverteilung.

Nach (4) sind die „relativen Spektren“ unter verschiedenen Beobachtungswinkeln als Funktion des Polarisationsgrades Geraden mit der Neigung $G(\theta)$. Wegen der nur sehr schwachen Krümmung der Kurven der Fig. 2 für Energien $\nu > 0,4\nu_g$ müssen dann die „relativen Spektren“ auch im Energiemaßstab in guter Näherung Geraden sein; dies ist in Übereinstimmung mit den Messungen von KERSCHER und KULENKAMPFF.

Wir betrachten nun bei fester Lage im Spektrum die Winkelverteilungskurven, wie sie sich nach (4) ergeben. Für vollständig polarisierte Strahlung wird die Verteilung durch $I(\theta)$ nach (5) beschrieben. Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das SCHERZER (5) für die Grenzfrequenz im Grenzfall $\frac{Z}{137\beta} \ll 1$ erhält.

Bei nicht vollständig polarisierter Strahlung wird diese einfache Verteilung durch den zweiten Term in (4) modifiziert. Diese Korrektur

an der Verteilung vollständig polarisierter Strahlung nimmt mit abnehmender Polarisation, nach Fig. 2 also mit abnehmender Frequenz im Spektrum zu. Dadurch ergibt sich die von SOMMERFELD diskutierte Wanderung des Maximums der Ausstrahlung zu kleineren Beobachtungswinkeln hin und gleichzeitig die Auffüllung der Minima der Ausstrahlung unter 0 und 180° . Wegen des ausgeprägten Maximums der Kurve $G(\vartheta)$ in Fig. 1 erfolgt die Auffüllung unter 0° mit abnehmender Quantenenergie sehr schnell; dies wird qualitativ durch die Messungen von KERSCHER und KULEN-KAMPPF bestätigt. Da $G(\vartheta)$ in der Nähe des Maximums von $F(\vartheta)$ nur sehr kleine Werte hat, wandert das Maximum der Ausstrahlung mit abnehmender Polarisation zunächst nur sehr langsam zu kleineren Beobachtungswinkeln hin und wird dabei immer schwächer ausgeprägt. Der genaue Verlauf des Ausstrahlungsmaximums ist also einer experimentellen Nachprüfung wenig zugänglich und sei daher nicht weiter angemerkt. Das von SOMMERFELD diskutierte Maximum der Härte liegt an der Stelle des Minimums unserer Funktion $G(\vartheta)$ nach Fig. 1.

Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen den relativen Intensitäten einerseits und dem Polarisationsgrad und dem Ausstrahlungswinkel andererseits, wie er nach (4) gegeben ist, haben wir uns ein einfaches Modell hergestellt, von dem die perspektivische Darstellung der Fig. 3 einen Eindruck gibt. Senkrecht zu einem kartesischen Koordinatensystem für den Polarisationsgrad und den Ausstrahlungswinkel haben wir bei $p=1$ die Funktion $F(\vartheta)$ nach (5) und bei $p=0$ die Summe der beiden Funktionen $F(\vartheta) + G(\vartheta)$ nach (5) und (6) aufgetragen. Verbindet man für feste Beobachtungswinkel die beiden Kurven durch Fäden, so stellen diese die relativen Spektren mit dem Polarisationsgrad als Abszisse dar. Die Schnitte senkrecht zu den Fäden sind dann mit dem Polarisationsgrad als Parameter die zu erwartenden Winkelverteilungskurven. In unserem Modell erkennt man gut die schnelle Auffüllung des Minimums unter 0° und die Wanderung des Ausstrahlungsmaximums mit abnehmender Polarisation.

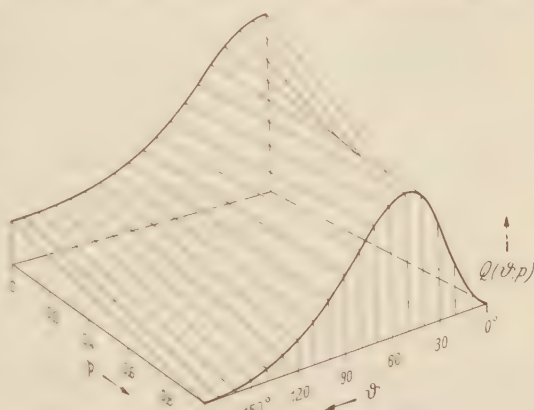


Fig. 3. Modell zur Veranschaulichung der relativen Intensität in Abhängigkeit von Polarisationsgrad und Beobachtungswinkel (34 keV).

Die unterschiedlichen Verhältnisse für verschiedene Elemente lassen sich dadurch einfach in unserem Modell sichtbar machen, daß man nach Fig. 2 in der p -Richtung entsprechende Hilfsskalen für r und r_0 anbringt. Die Abhängigkeit der relativen Spektren vom Antikathodenmaterial ist für 0 und 180° besonders groß. Fig. 4 zeigt für 34 keV die Spektren in Vorwärtsrichtung mit der Energie als Abszisse, wie sie sich nach (4) und (6) zusammen mit dem Verlauf des Polarisationsgrades nach Fig. 2 ergeben.

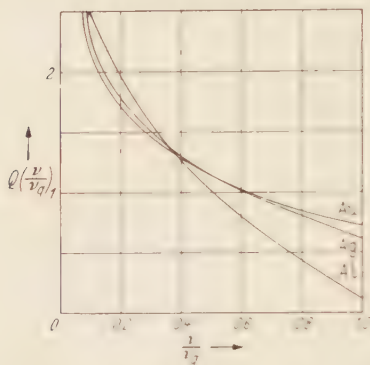


Fig. 4. Relative Intensität in Richtung der einfallenden Elektronen ($\vartheta = 0^\circ$) im Energiemaßstab für verschiedene Elemente (34 keV).

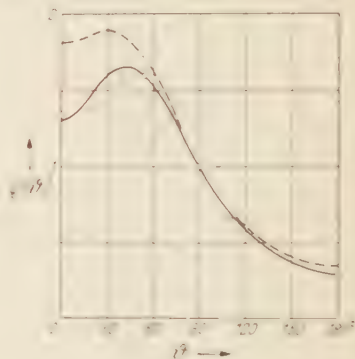


Fig. 5. Relative Intensität für $r = 0,4 r_0$ bei 34 keV nach (4). — Mit (5) und (6); - - - - mit (5) und (7). Meßpunkte nach KERSCHER und KULENKAMPF.

4. Ergänzungen.

Bei der Ableitung unserer Funktionen $F(\vartheta)$ und $G(\vartheta)$ sind wir von dem Ergebnis der SOMMERFELD'schen Rechnungen in der Form (1) ausgegangen. Beide Funktionen lassen sich aber auch aus der SOMMERFELD'schen Endformel [unsere Gl. (2)] ableiten. Wir erhalten dann $F(\vartheta)$ übereinstimmend mit (5). Für $G(\vartheta)$ kommt man aber zu einem von (6) merklich abweichenden Ergebnis:

$$G(\vartheta) = \frac{\frac{1}{2}[(1 - \beta \cos \vartheta)^4 + 1] - \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4}. \quad (7)$$

Eine Rechnung, die SMITH ⁶ auf Anregung von SOMMERFELD für die Verteilung an der Grenzfrequenz unter Mitnahme höherer Glieder in den benutzten Reihenentwicklungen durchgeführt hat, entscheidet für die zuerst abgeleitete Form von $G(\vartheta)$ [Gl. (6)]. Setzt man nämlich den von SOMMERFELD für die Grenzfrequenz genauer abgeleiteten Polarisationsgrad ([1], Gl. (86)) in unsere Gl. (4) ein, so erhält man nur dann Übereinstimmung mit dem Ergebnis von SMITH, wenn man $G(\vartheta)$ in der Form (6) benutzt.

Eine Entscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten für $G(\vartheta)$ läßt sich aber auch aus dem Experiment ableiten. Wir benutzen dazu die

Winkelverteilungskurve, die KERSCHER und KULENKAMPFF für $r = 0,4r_g$ aus ihren Messungen ableiten. Zwei Gründe lassen gerade diese Kurve hierzu geeignet erscheinen. Einmal unterscheiden sich Winkelverteilungskurven mit unterschiedlichem $G(\theta)$ dann besonders stark, wenn $(1 - \beta)$ möglichst groß, r/r_g also möglichst klein ist. Zum anderen sind die Winkelverteilungskurven für $r = 0,4r_g$ besonders unempfindlich gegen die bei KERSCHER und KULENKAMPFF diskutierten geringen Verunreinigungen der Al-Antikathodenfolie mit schweren Elementen; man entnimmt der Fig. 2, daß $(1 - \beta)$ für $r = 0,4r_g$ praktisch unabhängig vom Antikathodenmaterial ist. Fig. 5 zeigt die beiden Winkelverteilungskurven für $r = 0,4r_g$ mit $G(\theta)$ nach (6) bzw. (7). Die eingetragenen Meßpunkte der Arbeit von KERSCHER und KULENKAMPFF stehen in deutlichem Widerspruch zu der Kurve, die sich mit $G(\theta)$ in der Form (7) ergibt und damit auch im Widerspruch mit der SOMMERFELDSchen Endformel (2). Die Übereinstimmung mit der SOMMERFELDSchen Theorie in der von uns angegebenen Form ist befriedigend.

Herrn Professor Dr. H. KULENKAMPFF danken wir für sein großes Interesse an unseren Überlegungen und für klärende Diskussionen.

Literatur.

[1] SOMMERFELD, A.: Ann. Physik **11**, 257 (1931). — [2] KERSCHER, R. u. H. KULENKAMPFF: Z. Physik **140**, 632 (1955). — [3] WEINSTOCK, R.: Phys. Rev. **61**, 584 (1942). — [4] KIRKPATRICK, P., and L. WIEDMAN: Phys. Rev. **67**, 321 (1945). — [5] SCHERZER, O.: Ann. Physik **13**, 137 (1932). — [6] SMITH, L. P.: Phys. Rev. **40**, 885 (1932).

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

Zur Kosmologie mit veränderlicher Gravitationszahl.

Von

KURT JUST.

(Eingegangen am 14. Februar 1955.)

Die Grundzüge der JORDANSCHEN Kosmologie mit zeitabhängiger Gravitationszahl κ werden für diejenigen Systeme möglicher Feldgleichungen besprochen, die ein zeitlich linear expandierendes Weltmodell zulassen.

In der erweiterten Gravitationstheorie von JORDAN [2] und LUDWIG [1] läßt sich das zu den allgemeinen Feldgleichungen (D) führende Variationsprinzip (6(1) = Formelnummern aus 6) und 7 sind durch vorangestellte Ziffern gekennzeichnet — nach 6(56) schreiben:

$$\begin{aligned} & \delta \int \kappa \left(\frac{1}{2} G - \kappa \mathfrak{L} \right) d^4x = 0 \\ \text{mit} \quad & G = R + s \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad \sigma = \ln \kappa, \end{aligned} \quad (1) D$$

worin die Indizes von 1 bis 4 laufen. Dabei ist R der vierdimensionale Krümmungsskalar und κ die veränderliche *Gravitationszahl*; die üblichen LAGRANGE-Dichten der Materie und des MAXWELL-Feldes sind in \mathfrak{L} vereinigt. Die von LUDWIG [1] in der fünfdimensionalen *projektiven* Theorie benutzten Konstanten α , λ und die Feldfunktion J sind hier ausgedrückt durch

$$c = \alpha + \frac{1}{2}, \quad s = -\lambda - \alpha, \quad \kappa = e^\sigma = \frac{1}{2} J, \quad (2) D$$

weil diese für die *vierdimensionale* Schreibweise vorteilhafter sind. Die Sonderfälle (E) und (B) erhalten wir dann gemäß 6(40) mit 6(42)¹¹ und nach 6(38) durch

$$c = 0, \quad |s| \approx 1 \quad (3) E$$

und

$$c = 1, \quad |s| \gg 1; \quad (4) B$$

und daneben sollen *sämtliche* Fälle behandelt werden, die bei 6(37) mit (L) bezeichnet sind:

$$|s| \gg c^2 \neq 0. \quad (5) L$$

Nach 7(37) ist die Bedingung 7(23) für die richtige Darstellung der *Planetenbewegung* streng durch (3), aber annähernd durch (5), *nicht nur durch* (4) erfüllt.]

Die aus (1) durch Variation von $g_{\nu\mu}$ und σ folgenden Feldgleichungen lauten gemäß 7(5) bis 7(7):

$$\left. \begin{aligned} R_{\alpha}^{\beta} + c \sigma^{\beta}{}_{||\alpha} + (s + c^2) \sigma^{\beta} \sigma_{||\alpha} + \kappa T_{\alpha}^{\beta} \\ \cdot \left\{ \frac{1}{2} R - c \sigma^{\nu}{}_{||\nu} + \left(\frac{s}{2} + c^2 \right) \sigma^{\nu} \sigma_{||\nu} \right\} \delta_{\alpha}^{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (6) D$$

und

$$c R - s (2 \sigma^{\nu}{}_{||\nu} + c \sigma^{\nu} \sigma_{||\nu}) + 2 \kappa b = 0$$

mit

$$\sqrt{-g} T^{\alpha\beta} = - \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta g_{\alpha\beta}}, \quad \sqrt{-g} b = \frac{1}{2} \left(1 + c + \frac{\delta}{\delta \sigma} \right) \mathfrak{L}. \quad (7) D$$

Bilden wir aus (6) I:

$$\left. \begin{aligned} (R_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{2} R \delta_{\alpha}^{\nu} + \kappa T_{\alpha}^{\nu})_{||\nu} \\ = \left\{ c \sigma^{\nu}{}_{||\nu} + \left(\frac{s}{2} + c^2 \right) \sigma^{\nu} \sigma_{||\nu} \right\}_{||\alpha} - c \sigma^{\nu}{}_{||\alpha}{}_{||\nu} - (s + c^2) (\sigma^{\nu} \sigma_{||\alpha})_{||\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (8) D$$

sowie

$$c \sigma_{||\nu} \kappa T_{\alpha}^{\nu} = \frac{c}{2} (R - s \sigma^{\nu}{}_{||\nu} + 2 c \sigma^{\nu}{}_{||\nu}) \sigma_{||\alpha} - c (R_{\alpha}^{\nu} + c \sigma^{\nu}{}_{||\alpha}) \sigma_{\nu} \quad (9) D$$

und beachten in (8) die bekannte Identität

$$(R_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{2} R \delta_{\alpha}^{\nu})_{||\nu} = 0 \quad \text{sowie} \quad \sigma^{\nu}{}_{||\nu}{}_{||\alpha} - \sigma^{\nu}{}_{||\alpha}{}_{||\nu} = R_{\alpha\nu} \sigma^{\nu},$$

dann folgt durch Addition

$$\kappa^{-c} (\kappa^{1+c} T_{\alpha}^{\nu})_{||\nu} = \frac{1}{2} \{ c R - s (2 \sigma^{\nu}{}_{||\nu} + c \sigma^{\nu} \sigma_{||\nu}) \} \sigma_{||\alpha},$$

wegen (6)^{II} also:

$$(\kappa^{1+c} T_{\alpha}^{\nu})_{||\nu} + \kappa^{1+c} b \sigma_{||\alpha} = 0. \quad (10) D$$

Für die Metrik und den Energietensor machen wir die für die Kosmologie üblichen Ansätze, bei denen der Raum als *homogen und isotrop* vorausgesetzt ist und die *Materie* im Koordinatensystem *ruht*:

$$ds^2 = \varrho^2(t) d\Sigma^2 - dt^2, \quad \sigma = \sigma(t) \quad (11)$$

mit

$$d\Sigma^2 = d\Sigma_+^2 = dx^2 + \sin^2 x (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (12)$$

oder

$$d\Sigma^2 = d\Sigma_-^2 = dx^2 + \sin^2 x (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (13)$$

und

$$T_{\alpha}^{\beta} = p \delta_{\alpha}^{\beta} \quad \text{außer} \quad T_4^4 = -\varepsilon. \quad (14)$$

Hiermit lautet der Erhaltungssatz (10):

$$(1 + c) \dot{\kappa} \varepsilon + \kappa \dot{\varepsilon} - 3 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} (\varepsilon + p) \kappa - \dot{\kappa} b = 0, \quad (15) D$$

während von den Feldgleichungen (6) nur die folgenden drei linear unabhängig sind:

$$2 \frac{\ddot{v}}{\varrho} + \left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right)^2 \pm \frac{1}{\varrho^2} + c \left(\ddot{\sigma} + 2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\sigma} \right) + \left(\frac{s}{2} + c^2 \right) \dot{\sigma}^2 + \kappa p = 0, \quad (16) D$$

$$3 \left(\frac{\dot{\sigma}^2}{\varrho^2} \pm \frac{1}{\varrho^2} + c \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\sigma} \right) - \frac{s}{2} \dot{\sigma}^2 - \kappa \varepsilon = 0, \quad (17) D$$

$$-6c \left(\frac{\ddot{v}}{\varrho} + \frac{\dot{\sigma}^2}{\varrho^2} \pm \frac{1}{\varrho^2} \right) + s \left(2\ddot{\sigma} + 6 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\sigma} + c \dot{\sigma}^2 \right) + 2\kappa b = 0. \quad (18) D$$

Gemäß (2) ist darin

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa}, \quad (19)$$

die Punkte bezeichnen überall die zeitlichen Ableitungen, und von den doppeldeutigen Vorzeichen gelten die oberen für den Fall (12) positiver Raumkrümmung, die unteren bei negativer Krümmung nach (13). Weil der Erhaltungssatz (10) nur eine Folge der Feldgleichungen (6) war, brauchen wir trotz der *algebraischen* Unabhängigkeit der Gln. (15) bis (18) nur *drei* geeignete Kombinationen von ihnen zu erfüllen; besitzt man nämlich von (17) auch die zeitliche Ableitung, so ergibt sich aus (15) bis (19) nach einiger Rechnung:

$$3 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \{ (16) - (17) \} - \left\{ \frac{d}{dt} + c \dot{\sigma} \right\} (17) = \frac{\dot{\sigma}}{2} (18) + (15). \quad (20) D$$

Verlangen wir demnach

$$(15) = 0, \quad (18) + c(17) + 3c(16) = 0, \quad \frac{1}{3}(17) = 0, \quad (21) D$$

dann folgt mit (20):

$$\left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{c}{2} \dot{\sigma} \right) (16) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{c}{2} \dot{\sigma} \right) (18) = 0, \quad (22) D$$

es sind also durch (21) auch die Gln. (16) und (18) erfüllt, wenn außerdem gilt:

$$c \dot{\sigma} \neq -2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}; \quad (23) D$$

die Bedingungen (21) aber lauten mit (19) ausführlich:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon} + (1 + c) \dot{\sigma} \varepsilon + 3 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} (\varepsilon - p) - \dot{\sigma} \varepsilon \\ (2s + 3c^2) \left(\ddot{\sigma} + 3 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\sigma} + c \dot{\sigma}^2 \right) = c \kappa (\varepsilon - 3p) - 2\kappa b \end{aligned} \right\} \quad (24) D$$

und

$$\left[\left(\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right)^2 - \frac{1}{3} \kappa + \frac{1}{6} \dot{\sigma}^2 - c \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\sigma} \right] \left(\frac{1}{\varrho} \right)^2. \quad (25) D$$

Um die Fälle $p=0$ des „Materiekosmos“ und $p = \frac{1}{3} \varepsilon$ des „Lichtkosmos“ gemeinsam zu behandeln, setzen wir

$$p = \frac{\delta}{3} \varepsilon \quad \text{mit} \quad \delta = \text{const} = \begin{cases} 0 \\ 1. \end{cases} \quad (26)$$

Den Übergang von Lichtkosmos zum Materiekosmos können wir leider nicht streng erfassen, denn die folgenden Rechnungen lassen sich nur bei konstantem δ ausführen, und diese Annahme ist physikalisch nur in den Grenzfällen $\delta \ll 1$ und $\delta \approx 1$ sinnvoll.

Über das Verhalten der neuartigen Materie-Invarianten b läßt sich leider nichts Sicheres aussagen, obwohl sie für jede gegebene Theorie der Materiefelder aus (7)^{II} zu berechnen wäre. Mit den von LUDWIG [1] gemachten Ansätzen für \mathfrak{L} zeigt sich dann, daß wesentliche Beiträge zu b von den noch weitgehend ungeklärten Wechselwirkungen der *Kernkräfte* und ganz neuartigen zwischen dem MAXWELL-Feld und *neutraler* Materie herrühren. Doch hätte es keinen Sinn, so unsichere Grundlagen und die bekanntlich viel zu ungenauen Näherungslösungen der Mesonen-Feldgleichungen in der *Kosmologie* zu verwenden, die ja noch ganz andersartige Unsicherheiten aufweist.

Um dennoch zu erkennen, welchen Einfluß ein von Null verschiedenes b haben könnte, wollen wir voraussetzen:

α) Die Abhängigkeit der in üblicher Weise definierten LAGRANGE-Dichte \mathfrak{L} von der Gravitationszahl $z = e^{\sigma}$, die ja in bisherigen Theorien gar nicht besteht, liefere auch in (7)^{II} neben \mathfrak{L} selbst nur einen geringen Beitrag; daher sei b von der Wahl der Feldgleichungen nur durch den Faktor $(1+c)$ abhängig.

β) Für unsere kosmologische Näherung spielt von b nur der raumzeitliche *Mittelswert* über einige Schwingungen der Materiewellen eine Rolle. Nach LUDWIG [1] S. 76 soll dieser unter den Bedingungen des *Materiekosmos*, also für $p=0$, verschwinden.

γ) Das Verhältnis von b zum Druck p , das dank unserer Definition (7)^{II} *dimensionslos* ist, am besten aus (24)^{II} zu erkennen¹, sei gegen b und p selbst nur langsam veränderlich und in sehr weitem Sinne von der Größenordnung Eins.

Unter diesen Annahmen dürfen wir ansetzen

$$b = (1+c) \cdot 3\mu \cdot p \quad \text{mit} \quad \frac{1}{100} < |\mu| = \text{const} < 100, \quad (27) D$$

so daß die Feldgleichungen (24) mit (26) lauten

$$(2s + 3c^2) \left(\ddot{\sigma} + 3 \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \dot{\sigma} + c \dot{\sigma}^2 \right) = [c(1-\delta) - 2(1+c)\mu\delta] \varkappa \varepsilon \quad (28) D$$

und

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + (1+c)(1-\mu\delta)\dot{\sigma} + (3+\delta)\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = 0. \quad (29) D$$

Die hier benutzte Annahme $\mu = \text{const}$ ist ebenso wie $\delta = \text{const}$ notwendig für die Existenz einer Lösung, bei der alle Glieder von (25) bis (29) bis auf Konstanten dieselben Zeitfunktionen sind. Diese Forderung führt wegen des letzten Gliedes von (25) auch zur zeitlich linearen Expansion $\varrho \sim t$, und wegen der linken Seite von (28) muß $|\dot{\sigma}|$ wie t^{-1} , also $\varepsilon \kappa$ auf der rechten Seite wie t^{-2} abnehmen; wir müssen daher entsprechend dem Ansatz (17.23) von LUDWIG [I] verlangen:

$$\varrho = \varrho_\delta \cdot t, \quad \dot{\sigma} = -\sigma_\delta \cdot t^{-1}, \quad \varepsilon \kappa = \varepsilon_\delta \cdot t^{-2}. \quad (30) \text{ L}$$

Damit gehen (28) und (29), sowie (25) in die folgenden Gleichungen zwischen den Konstanten ϱ_δ , σ_δ , ε_δ und δ , μ über:

$$\left. \begin{aligned} (2s + 3c^2)(c\sigma_\delta - 2)\sigma_\delta &= [c(1 - \delta) - 2(1 + c)\mu\delta]\varepsilon_\delta, \\ 1 - \delta &= c - \mu\delta - c\mu\delta, \\ 1 &= \frac{4}{3}\varepsilon_\delta + \frac{5}{6}\sigma_\delta^2 + c\sigma_\delta \mp \varrho_\delta^{-2}, \end{aligned} \right\} \quad (31) \text{ L}$$

und nach einiger Rechnung folgt daraus:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\delta &= \frac{1 + \delta}{c - \mu\delta - c\mu\delta}, \quad \varepsilon_\delta = -\frac{(1 + \delta)(2s + 3c^2)}{(c - \mu\delta - c\mu\delta)^2}, \\ \text{sowie} \\ \varrho_\delta^{-2} &= \frac{1}{6} \frac{\delta - \delta - 3 - 3 - 3 - 1}{(c - \mu\delta - c\mu\delta)^2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (32) \text{ L}$$

Für den Materiekosmos ($\delta = 0$) vereinfacht sich dies zu

$$\sigma_0 = \frac{1}{c}, \quad \varepsilon_0 = 4h - 3, \quad \pm \varrho_0^{-2} = h - 1 \quad (33) \text{ L}$$

mit der Abkürzung

$$h = -\frac{s}{2s+3}; \quad (34) \text{ L}$$

daher liefert (30) mit (19) und (33)

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{1+h-1} t, \quad \varepsilon \kappa = \frac{4h-3}{t^2} \\ \text{und} \\ \kappa &\sim \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{c}} \quad \text{für} \quad p = 0, \end{aligned} \right\} \quad (35) \text{ L}$$

während die weitaus umständlicheren Formeln des Lichtkosmos aus (32) durch $\delta = 1$ folgen.

Die positive *Gravitationszahl* κ zeigt nach (35) im Materiekosmos nur dann eine zeitliche Abnahme, wenn wir fordern

$$c > 0. \quad (36) \text{ L}$$

und verlangen wir, daß die Energiedichte ε positiv sei, so muß $h > \frac{3}{4}$ sein, wegen (34) also

$$s < -\frac{3}{2}c^2. \quad (37)L$$

Daher muß die zur richtigen Darstellung der Planetenbewegung nötige Bedingung (5) der Fälle (L) durch die kosmologischen Forderungen (36) und (37) verschärft werden zu

$$\boxed{|s| \gg c^2 \quad \text{und} \quad c > 0 > s}. \quad (38)L$$

Für (34) muß deshalb gelten:

$$h \gg 1, \quad (39)L$$

so daß in (35)^I der untere Vorzeichenfall nicht mehr in Frage kommt, also der Kosmos gemäß (11) bis (13) nur ein geschlossener Raum sein darf:

$$\boxed{d\Sigma = d\Sigma_+}. \quad (40)L$$

Die Bedingung (23) lautet mit (30)

$$c\sigma_\delta \neq 2, \quad \text{oder nach (32)}^I: \quad (1 - \delta)c \neq 2(1 + c)\mu\delta, \quad (41)L$$

wegen (36) ist sie also im Materiekosmos ($\delta = 0$) ebenso wie im Lichtkosmos ($\delta = 1, \mu \neq 0$) erfüllt; im übrigen wären (16) und (18) durch (30) mit (32) auch dann befriedigt, wenn zufällig (23) verletzt wäre.

Damit ist vollständig bewiesen, daß die Feldgleichungen (6) ein linear expandierendes Weltmodell mit positiver Raumkrümmung und zeitlicher Abnahme der Gravitationszahl κ zulassen in allen Fällen, in denen die genannten Annahmen erfüllt sind. Hinsichtlich der für die Theorie grundlegenden Parameter c und s mußten wir dazu die bei 7(37) als notwendig erkannte Forderung (38)^I durch (38)^{II} ergänzen. Verlangt man im besonderen, daß die Gravitationszahl κ im Materiekosmos umgekehrt proportional dem Weltalter t abnimmt, so muß man $c = 1$ setzen, was nach (4) zu dem von JORDAN [2] § 28 betrachteten Falle (B) führt. Gemäß (35) mit (34) ist dann:

$$\varrho \approx \sqrt{\frac{2}{|s|}} t, \quad \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{t_0}{t}, \quad \varepsilon \approx \frac{2|s|}{\kappa_0 t_0 t} \quad \text{für} \quad p = 0, \quad (42)B$$

worin κ_0 und t_0 zugehörige Werte von κ und t , z. B. die „heutigen“ sind.

Gegen all diese kosmologischen Modelle und damit gegen alle Systeme (L) von Feldgleichungen lassen sich jedoch mehrere Einwände erheben:

1. Nach der bei 6(39) verschärften Fassung a) des von JORDAN [3] vertretenen „DIRACschen Dimensionsprinzips“ müßte für die beiden grundlegenden Konstanten c und s gelten

$$(c = 0 \quad \text{oder} \quad |c| \approx 1) \quad \text{und} \quad (s = 0 \quad \text{oder} \quad |s| \approx 1), \quad (43)$$

was durch (38) unmöglich gemacht ist.

2. Nach dem von JORDAN 2 S. 179 anerkannten Einwand von TELLER 1 kann die Veränderlichkeit von α seit dem Erdzeitalter, in dem das *organische Leben* begann, nicht so stark gewesen sein wie bei (42), weil sonst die größere Leuchtkraft der Sonne und ihr geringerer Abstand von der Erde auf dieser zu *hohe Temperaturen* hervorgerufen hätten.

3. Wegen (35)¹ mit (39) müßte für die heutigen Werte q_0 und t_0 von Weltradius und -alter gelten:

$$q_0 \ll t_0, \quad (44) L$$

die *Krümmung des Raumes* müßte sich daher in den Beobachtungen schon bemerkbar gemacht haben.

4. Tatsächlich lassen die bisherigen Ergebnisse der Astronomie noch nicht einmal eine klare Entscheidung zwischen positiver oder negativer Raumkrümmung zu, im letzten Falle aber ist nach (40) eine lineare Expansion ausgeschlossen.

5. Wenn die heutige Entstehung neuer Materie in der von JORDAN 2 S. 187 vermuteten Weise vor sich geht, müßte im Falle (B) fast jedes Jahr in jedem Spiralnebel ein neuer Stern entstehen, also mehr als hundertmal so oft, wie man eine Supernova I beobachtet.

6. Es ist (39) nicht die einzige, sondern nur die einfachste Möglichkeit, die recht umständlichen Gln. (24) und (25) zu lösen.

7. Innerhalb der Bedingungen (38) bleiben alle Parameter $|a|$ und $|s|$ weiterhin unbestimmt (im Falle (B) nur $|s|$).

8. Der fürs lineare Modell des Lichtkosmos nötige Ansatz (27) könnte eine allzu grobe Näherung für b sein.

Dem entscheidendsten, weil am sichersten begründeten Einwand 2. ließe sich begegnen, indem man c so groß wählt, daß sich α in (35) langsam genug mit dem Weltalter ändert. Dadurch würde aber in 1. von den Bedingungen (43) sogar die für c verletzt, die im Falle (B) im Gegensatz zu der für s erfüllt ist. Die Einwände 3. und 4. erfordern zur näheren Begründung eine Untersuchung der Lichtausbreitung im expandierenden Raum mit veränderlicher Gravitationszahl, daher sollen sie ebenso wie 5. erst in späteren Arbeiten besprochen werden. Der Satz 6. erweckt zunächst sogar die Meinung, der Mensch müßte „lineare Räume“ missverstehen zu Ableitung der Feldgleichungen (L) führen, weil deren andere Lösungen besser mit der Erfahrung in Einklang zu bringen sein könnten. Diese allgemeinen Lösungen werden aber nach JORDAN [5] vermutlich nur um die lineare „oszillieren“, so daß man für Epochen, die wie beim Einwand 2. mit dem Weltalter vergleichbar sind, doch keine wesentliche Verbesserung erwarten darf.

Setzen wir gemäß (3) überall $c=0$, so wird die Lösung (35) **unbrauchbar**, die Bedingungen (23) bis (25) aber vereinfachen sich bedeutend; denn bei $c=0$ ist (23) stets erfüllt, (24) und (25) aber gehen durch (3) über in die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varrho}^2 &= \frac{1}{3} \left(\varepsilon \kappa + \frac{s}{2} \dot{\sigma}^2 \right) \varrho^2 \mp 1 & \text{mit} & \quad \dot{\sigma} = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa}, \\ \dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\sigma} + 3 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} (\varepsilon + p) &= \dot{\sigma} b, & \ddot{\sigma} + 3 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\sigma} &= -\frac{\kappa}{s} b. \end{aligned} \right\} \quad (45) E$$

Diese lassen sich für den *Materiekosmos* ($p=b=0$) ohne weiteres lösen, was in einer folgenden Arbeit geschehen soll.

Dabei werden wir neben den heutigen Werten ϱ_0, t_0, κ_0 von Weltradius, Weltalter und Gravitationszahl *nur eine neue Integrationskonstante* τ einführen müssen. Diese „charakteristische Zeit“ werden wir — mit Hilfe der Sternentstehungshypothesen von JORDAN [2] S. 186, der Überlegungen aus [2] § 33 und der von TELLER [4] — zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{10}$ des heutigen Weltalters t_0 eingrenzen. Sie hat die Bedeutung, daß eine *merkliche Abnahme der Gravitationszahl κ und eine häufige Entstehung neuer Sterne nur in den frühen Epochen* $t < \tau \ll t_0$ erfolgt. Dagegen ist in der heutigen Epoche $t \approx t_0 \gg \tau$ die aus (45) folgende Kosmologie (E) von der ursprünglichen Form der EINSTEINSCHEN nur dadurch unterschieden, daß noch einige wenige Sterne, nämlich die heutigen Supernovae I, als „Nachzügler“ entstehen.

Herrn Professor LUDWIG danke ich herzlich für die Anregung und Förderung dieser Arbeiten, deren finanzielle Ermöglichung ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu verdanken habe. Herrn Dipl.-Physiker H. ROLLNIK danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskriptes.

Literatur.

- [1] LUDWIG, GÜNTHER: Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1951. — [2] JORDAN, PASCUAL: Schwerkraft und Weltall. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1952. — [3] JORDAN, PASCUAL: Die Herkunft der Sterne, besonders S. 11. Stuttgart 1947. — [4] TELLER, E.: Phys. Rev. **73**, 801 (1948). — [5] JORDAN, PASCUAL: Z. Physik **132**, 655 (1952). — [6] JUST, K.: Z. Physik **140**, 485 (1955). — [7] JUST: Z. Physik **140**, 524 (1955).

Berlin, Institut für Theoretische Physik der Freien Universität.

Autorenverzeichnis des 140. Bandes.

- AMREHN, H., und H. KULENKAMPFF, Energieverteilung im Spektrum der Röntgen-Bremsstrahlung dünner Antikathoden in Abhängigkeit von Ordnungszahl und Spannung. S. 452.
- BECKER, E. W., und R. MISENTE, Die Zähigkeit von HD und He³ zwischen 14° K und 20° K. S. 535.
- BRANDMÜLLER, J., RAYLEIGH-Streuung und Rotations-RAMAN-Effekt von Flüssigkeiten. S. 75.
- BURHORN, FR., Temperatur und thermisches Gleichgewicht im Eisenbogen. S. 440.
- BUSZ-PEUCKERT, G., und W. FINKELNBURG, Die Abhängigkeit des Anodenfalles von Stromstärke und Bogenlänge bei Hochtemperaturbögen. S. 540.
- CARIO, G., und J. H. KALLWEIT, Zum Wachstum dünner Schichten. S. 47.
- DOLL, R. s. MEISSNER, W. S. 340.
- DZIERGWA, H., und H. LANGE, Ein Vergleich der Lumineszenz von Calciumsilikat (Mn, Pb) und Zinkberylliumsilikat (Mn). S. 359.
- ECKER, G., Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung. I. Grundlagen und Grenzen kollektiver Beschreibung. S. 274.
- Zur statistischen Beschreibung von Gesamtheiten mit kollektiver Wechselwirkung. II. Die Bedeutung der Beschränkungen des D-Modelles für die Begriffsbildung und Ergebnisse kollektiver Beschreibung. S. 293.
- EDER, G., Zerfall und Erzeugung von A-Teilchen. S. 215.
- EHLERS, J., Exakte Lösungen der EINSTEIN-MAXWELLSchen Feldgleichungen für statische Felder. S. 394.
- FICK, E., Die Polarisation des Lichtes durch asphärische, ferromagnetische Teilchen in einem homogenen Magnetfeld. II. Theorie. S. 308.
- FINKELNBURG, W. s. BUSZ-PEUCKERT, G. S. 540.
- GEIGER, W., Die Emission negativer Ladungsträger bei Einwirkung von Halogenmolekülen auf Alkalimetall-oberflächen. S. 608.
- GERTHSEN, P., und P. SCHULZ, Elektrodenfälle und Bogengradienten in der Quecksilber-Hochdruckentladung. S. 510.
- GLOVER III, R., Eine empirische Gesetzmäßigkeit für die Stellung der Supraleiter im Periodischen System der Elemente. S. 494.
- GOBRECHT, H., und W. WEISS, Lumineszenzuntersuchungen an Uran-aktivierten Erdalkaliwolframaten und -molybdaten. S. 139.
- , D. HAHN und F. W. SEEMANN, Die Leuchtwellen bei der Lumineszenzanregung von Phosphoren durch elektrische Wechselfelder. S. 432.
- GÖING, W., H. MEIER und H. MEINEN, Das Kontinuum des Quecksilberhöchstdruckbogens. S. 376.
- HAHN, D. s. GOBRECHT, H. und F. W. SEEMANN. S. 432.
- HÖHLER, G., Wechselwirkung eines nicht-relativistischen Teilchens mit einem skalaren Feld für mittlere Kopplung. I. S. 192.
- HYLLERAAS, E. A., Zur praktischen Lösung der relativistischen Einelektromagnetischen Gleichung. S. 626.
- JUST, K., Ein Absorbermodell aus Wasserstoffatomen. S. 16.
- Neue Feldgleichungen zur JORDANSchen Gravitations-Theorie. S. 485.
- Zur Planetenbewegung bei veränderlicher Gravitationszahl. S. 524.
- Zur Kosmologie mit veränderlicher Gravitationszahl. S. 648.
- KALLWEIT, J. H. s. CARIO, G. S. 47.

- KERSCHER, R., und H. KULENKAMPFF, Spektrum und Richtungsverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung einer dünnen Antikathode. S. 632.
- KULENKAMPFF, H., s. H. AMREHN. S. 452.
- s. KERSCHER, R. S. 632.
- LANGE, H. s. DZIERGWA, N. S. 359.
- LEGLER, W., Zur Statistik der Elektronenlawinen. S. 221.
- MAECKER, H., TH. PETERS und H. SCHENK, Ionen- und Atomquerschnitte im Plasma verschiedener Gase. S. 119.
- MEIER, H. s. GÖING, W. und H. MEINEN. S. 376.
- MEINEN, H. s. GÖING, W. und H. MEIER. S. 376.
- MEISSNER, W., und R. DOLL, Gleichzeitige oszillographische Registrierung von Widerstand und magnetischem Fluß für Indium-Einkristalle im Übergangsgebiet zur Supraleitung bei starker Strombelastung. S. 340.
- MISENTA, R. s. BECKER, E. W. S. 535.
- MITRA, S. S., Grundschrwingungen von zweiatomigen Molekülen. S. 531.
- MOHANTY, S. R., Einfluß von Licht auf den Mechanismus von Gasentladungen (JOSHI-Effekt). S. 370.
- MOLLIÈRE, K., und H. NIEHRS, Interferenzbrechung von Elektronenstrahlen. III. Bestimmung der Kristall-Orientierung, der Strukturfaktoren und des Brechungspotentials von Magnesiumoxyd-Kristallen aus den Feinstrukturen der Elektronenbeugungsreflexe. S. 581.
- MOSER, H., Das apparative Linienprofil bei Prismenspektrographen. S. 36.
- NIEHRS, H., Die FRIEDELSCHE Regel im Lichte der dynamischen Interferenztheorie. S. 106.
- s. MOLLIÈRE, K. S. 581.
- OLDEKOP, W., Zur Theorie der Leitfähigkeit und Viskosität von Salzschnmelzen. S. 181.
- PETERS, TH. s. MAECKER, H. und H. SCHENK. S. 119.
- PANCHOLY, M. s. P. PARTHASARATHY, S. und C. P. TIPNIS. S. 156.
- PARTHASARATHY, S., C. B. TIPNIS und M. PANCHOLY, Dämpfung von Ultraschallwellen in Flüssigkeiten. S. 156.
- , —, — Zusammenhang von optisch gemessener Ultraschallabsorption und spezifischer Wärme. S. 504.
- PAUL, W., und M. RAETHER, Das elektrische Massenfilter. S. 262.
- RAETHER, M. s. PAUL, W. S. 262.
- RIEDEL, O., und F. SCHMEISSER, Die Selbstabsorption von beta-aktiviertem Thallium im supraleitenden Zustand. S. 92.
- RÜCHARDT, H., Bildung und Zerstörung von α -Zentren in KBr-Kristallen. S. 547.
- SAUTER, F., und J. WEISSE, Zur Theorie der inneren Feldemission. S. 150.
- SCHENK, H. s. MAECKER, H. und TH. PETERS. S. 119.
- SCHNEER, M., und E. ZEITLER, Zum Vergleich der SOMMERFELDSchen Theorie der Röntgen-Bremsstrahlung mit experimentellen Untersuchungen. S. 642.
- SCHERRER, W., Berichtigung und Ergänzung „zur linearen Feldtheorie“. S. 160.
- Zur linearen Feldtheorie. II. (Schwache Felder). S. 164.
- SCHMEISSNER, F. s. RIEDEL, O. S. 92.
- SCHULZ, P. s. GERTHSEN, P. S. 510.
- SEEMANN, F. W. s. GOBRECHT, H. und D. HAHN. S. 432.
- SEIFERT, G., und O. STASIW, Sensibilisierende Absorption und photochemische Reaktionsprodukte im Silberbromid während der Bestrahlung. S. 97.
- STÄHELIN, P., D. MAEDER und M. POCHON, Untersuchung des 15 Minuten-Antimons im Koinzidenzspektrographen mit doppelter Energieauflösung. S. 498.
- STASIW, O. s. SEIFERT, G. S. 97.
- STROSCHKE, H., Zur Wirksamkeit von Cadmiumselenidschichten beim Selen-gleichrichter. S. 409.
- THEIS, W. R., Struktur des Phasenraumes und ein Zusammenhang zwischen Bahndrehimpulsverteilung und Dichteverteilung der Nukleonen im Atomkern. S. 1.

- TIPNIS, C. B. s. PARTHASARATHY, S. und M. PANCHOLY. S. 156, 504.
- WAIDELICH, W., Röntgenmessung des AgBr-Netzebenenabstands in photographischen Schichten mit latentem Bild. S. 241.
- WEGENER, H., Adsorption von Kalium auf Quarzoberflächen. S. 465.
- Wirksamkeit der Kondensationskerne (Kalium auf Quarz). S. 473.
- WEISS, W. s. GOBRECHT, H. S. 139.
- WEISSE, J. s. SAUTER, F. S. 150.
- WESTPFAHL, K., Wirkungsquerschnitt und „Sammlungsvermögen“ einer Potentialschale in einem Teilchenstrom. S. 414.
- WOLTER, H., Phasen- und Amplitudenmessung durch Elliptizitätsanalyse an Phasenkontrastbildern. S. 57.
- Abbildendes Interferometer für Phasen- und Amplitudenmessung. S. 565.
- YAMAGUCHI, S., Zur Abschätzung der Dicke der BEILBY-Schicht. S. 577.
- ZEITLER, E. s. SCHEER, M. S. 642.